Analiza matematyczna 2

lista zadań nr 9

mnożniki Lagrange'a

Rozgrzewka i **Ćwiczenia** pomieszane razem

1. (a) Uzasadnij wprost (tzn. nie stosując metody mnożników Lagrange'a), że minimum warunkowym funkcji $F(x_1, x_2) = x_1$ przy warunku $G(x_1, x_2) = 0$, gdzie $G(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2$, jest wartość $F(0, 0) = 0$.

   (b) Spróbuj zastosować metodę mnożników Lagrange'a. Zauważ, że metoda ta nie umożliwia znalezienia faktycznego minimum warunkowego funkcji F.

   (c) Uzasadnij, dlaczego tak jest.

2. (a) Zastosuj metodę mnożników Lagrange'a, by wśród walców o ustalonym polu powierzchni całkowitej A znaleźć ten, który ma największą objętość V.

   Wskazówka: Przy odpowiednim doborze parametrów $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, $V = \pi r^2 h$.

   (b) Wśród stożków o ustalonym polu powierzchni całkowitej A znajdź ten, który ma największą objętość V.

   Wskazówka: Przy odpowiednim doborze parametrów $A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Z drugiego z otrzymanych równań wyznacz λ, wstaw do pierwszego.

   (c) Wśród trójkątów o zadanym promieniu r okręgu wpisanego znajdź ten o najmniejszym polu/obwodzie.

   (d) Wśród trójkątów o zadanym promieniu R okręgu opisanego znajdź ten o największym obwodzie.

   (e) Wśród trójkątów o zadanym promieniu R okręgu opisanego znajdź ten o największym polu.
   Wskazówka: Parametryzuj wartościami kątów trójkąta.

   (f) (dla wytrwałych) Wśród trójkątów o zadanym promieniu R okręgu opisanego znajdź ten o największym promieniu r okręgu wpisanego.

   (g) (dla ambitnych) Wśród trójkątów o zadanym promieniu r okręgu wpisanego i zadanym obwodzie l znajdź te, dla których długość promienia R okręgu opisanego jest minimalna/maksymalna.

3. Rzeka meandruje wzdłuż krzywej $G(x, y) = 0$, gdzie $G(x, y) = \sin\frac{\pi x}{2} - \sin\frac{\pi y}{2} + y$. Nasz dom znajduje się w punkcie $(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2})$. Chcemy się wykąpać w rzece i chcemy wiedzieć, gdzie będzie najbliżej. Dla uproszczenia minimalizujemy *kwadrat* odległości domu od punktu na rzece, tj. $F(x, y) = (x - \frac{\pi}{4})^2 + (y - \frac{3}{2})^2$.

   (a) Zapisz układ równań otrzymany metodą mnożników Lagrange'a.

   (b) Uzasadnij, że punkt $(0, 1)$ jest podejrzany o bycie ekstremum warunkowym.

   (c) Uzasadnij, że jest to minimum lokalne (oblicz macierz drugich pochodnych cząstkowych funkcji $F(x, y) - \lambda G(x, y)$ w tym punkcie).

   (d) Sporządź wykres krzywej danej równaniem $G(x, y) = 0$ i zauważ, że $(0, 1)$ jest minimum globalnym.

   Zadanie dodatkowe: uzasadnij, że $(0, 1)$ jest minimum globalnym. W tym celu:

   (e) zauważ, że krzywa dana równaniem $G(x, y) = 0$ jest symetryczna względem prostej $x = 1$;

   (f) wywnioskuj, że jeśli (p, q) jest minimum globalnym, to $p \le 1$;

   (g) uzasadnij, że jeśli $\frac{\pi}{2}x + y = 1$ oraz $x \le 1$, to $G(x, y) \ge 0$ i $G(x, y) = 0$ tylko dla $x = 0$, $y = 1$;

   (h) wywnioskuj, że cały wykres krzywej $G(x, y) = 0$ dla $x \le 1$ leży pod prostą $\frac{\pi}{2}x + y = 1$ i jedynym punktem przecięcia jest właśnie $(0, 1)$.

4. Sonda kosmiczna znajdująca się w punkcie $(2, 2, 2)$ chce jak najszybciej dotrzeć do asteroidy, ale w miejscu oświetlonym przez Słońce. Powierzchnia asteroidy opisana jest równaniem $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, zaś obszar oświetlony leży w półprzestrzeni $\sqrt{2}\,x - y - z \le 0$. W którym kierunku powinna udać się sonda?

   Wskazówka: Jak w poprzednim zadaniu minimalizuj *kwadrat* odległości.

Mateusz Kwaśnicki