Wstęp do logiki i teorii mnogości
Relacje częściowego porządku – lista zadań

1. Sprawdź, że podane poniżej relacje są relacjami częściowego porządku na $\mathcal{Z}$. Tam, gdzie trzeba, zakładamy, że „$\preceq$" jest relacją częściowego porządku na $\mathcal{X}$. Ponadto przyjmujemy, że $x \prec y \iff x \preceq y \wedge x \neq y$.
   (a) Relacja zawierania „$\subseteq$" dla $\mathcal{Z} = \mathcal{P}(X)$, gdzie X jest dowolnym zbiorem.
   (b) Relacja podzielności „$|$" dla $\mathcal{Z} = \mathbf{Z}_+$ (zbiór liczb całkowitych dodatnich).
   (c) Relacja $x \trianglelefteq y \iff f(x) \prec f(y) \vee x = y$ gdy $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ jest jakąś funkcją.
   (d) Relacja $f \trianglelefteq g \iff (\forall x \in Y) f(x) \preceq f(y)$ gdy $\mathcal{Z} = \mathcal{X}^Y$.
   (e) Porządek leksykograficzny na ciągach:
   $$a \trianglelefteq b \iff a = b \vee (\exists n \in \mathbf{N})\,(a_n \prec b_n \wedge (\forall k < n) a_k = b_k)$$
   gdy $\mathcal{Z} = \mathcal{X}^{\mathbf{N}}$.
   (f) Porządek produktowy: $(p, q) \triangleleft (p', q') \iff p \prec p' \wedge q \prec q'$ dla $\mathcal{Z} = \mathcal{X}^2$.
   (g) Porządek leksykograficzny w produkcie: $(p, q) \trianglelefteq (p', q') \iff p \prec p' \vee (p = p' \wedge q \preceq q')$ dla $\mathcal{Z} = \mathcal{X}^2$.
   (h) Porządek maksymoleksykograficzny w produkcie:
   $$\begin{aligned}(p,q) \trianglelefteq (p',q') \iff\ & \max(p,q) \prec \max(p',q') \quad \vee \\ & (\max(p,q) = \max(p',q') \wedge \min(p,q) \prec \min(p',q')) \quad \vee \\ & (\max(p,q) = \max(p',q') \wedge \min(p,q) = \min(p',q') \wedge p \preceq p')\end{aligned}$$
   gdy „$\preceq$" jest liniowym porządkiem na $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{X}^2$.
2. Podaj przykład nieskończonego zbioru dobrze uporządkowanego, który posiada element największy.
3. Czy (wzgl. przy jakich założeniach) porządki z zadania 1. są liniowe? Czy są dobrymi porządkami?
4. Udowodnij, że jeśli w zbiorze uporządkowanym istnieje element największy, to jest on jedynym elementem maksymalnym. Czy twierdzenie odwrotne jest prawdziwe?
5. Czy (wzgl. przy jakich założeniach) w porządkach z zadania 1. istnieją elementy minimalne/maksymalne/najmniejsze/największe?
6. Udowodnij, że jeśli (x_n) i (y_n) są ciągami liczb naturalnych, to istnieją liczby k i l takie, że $k < l$, $x_k \leq x_l$ oraz $y_k \leq y_l$.
7. Załóżmy, że $X = \mathbf{R}$, „$\preceq$" = „$\leq$". Czy w porządkach z zadania pierwszego istnieją nieskończone łańcuchy i antyłańcuchy?
8. Rozważmy zbiór $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ z relacją zawierania „$\subseteq$". Czy istnieje w $\mathcal{X}$ łańcuch równoliczny z $\mathcal{X}$? Czy istnieje antyłańcuch równoliczny z $\mathcal{X}$?
9. Udowodnij, że jeśli $\mathcal{X}$ jest zbiorem dobrze uporządkowanym przez relację „$\preceq$" i w $\mathcal{X}$ nie ma elementu największego, to „$\preceq$" i porządek maksymoleksykograficzny „$\trianglelefteq$" na $\mathcal{X}^2$ są równoważne. Korzystając z twierdzenia o dobrym uporządkowaniu, wywnioskuj stąd, że $|A| = |A^2|$ dla każdego nieskończonego zbioru A.