Wstęp do logiki i teorii mnogości
Funkcje i relacje – lista zadań

(na podstawie listy zadań prof. J. Cichonia)

1. Podać przykład relacji, która jest:
   (a) zwrotna i przechodnia, ale nie symetryczna,
   (b) zwrotna i symetryczna, ale nie przechodnia,
   (c) przechodnia i symetryczna, ale nie zwrotna.

2. Niech R będzie relacją. Udowodnij, że:
   (a) jeśli R jest zwrotna, to $R \subseteq R \circ R$.
   (b) R jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $R \circ R \subseteq R$,
   (c) R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R = R^{-1}$.

3. Znajdź najmniejszą relację
   (a) przechodnią,
   (b) symetryczną,
   (c) równoważności,

   zawierającą relację $R = \{(n, n+1) : n \in \mathbf{N}\}$.

4. Niech $R = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| = |y|\big\}$ oraz $Q = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = \sin x\big\}$. Wyznacz $R \circ Q$ oraz $Q \circ R$ i narysuj wykresy tych relacji. Czy $R \circ Q = Q \circ R$? Co by się zmieniło, gdyby w definicji Q zastąpić sinus kosinusem?

5. Udowodnij, że dla każdej funkcji f i wszystkich zbiorów A, B zachodzi:
   (a) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$,
   (b) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$,
   (c) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$,
   (d) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.

   Czy wzory (a), (b) i (c) można uogólnić na sumy i przekroje dowolnych rodzin zbiorów?

6. Podaj przykład funkcji f takiej, że $f(x) = f[x]$ oraz $f(y) \neq f[y]$ dla pewnych x, y.

7. Niech f będzie funkcją. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:
   (a) f jest różnowartościowa,
   (b) $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$ dla wszystkich zbiorów A, B,
   (c) $f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B]$ dla wszystkich zbiorów A, B.

8. Niech $X \neq \varnothing$. Wyznaczyć $\varnothing^{\varnothing}$, $X^{\varnothing}$ oraz $\varnothing^{X}$.

9. Wyznaczyć bijekcję między $\mathbf{N}$ i $\mathbf{Z}$.

10. Wyznaczyć bijekcje między następującymi parami zbiorów:
    (a) $(0, 1)$ oraz $(-1, 1)$,
    (b) $(0, 1)$ oraz $(0, \infty)$,
    (c) $(0, 1)$ oraz $\mathbf{R}$,
    (d) $(0, 1)$ oraz $[0, 1)$,
    (e) $(0, 1)$ oraz $[0, 1]$,
    (f) $(0, 1)$ oraz $(0, 1) \setminus \big\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\big\}$.

11. Udowodnić, że jeśli istnieje bijekcja między $A \times A$ oraz A, to A jest zbiorem pustym, jednoelementowym lub nieskończonym.
    Prawdziwe jest również twierdzenie przeciwne! W jego dowodzie wykorzystuje się lemat Kuratowskiego-Zorna.

12. Podać przykład bijekcji między $[0, 1)$ i $[0, 1) \times [0, 1)$.
    Wskazówka: Wystarczy znaleźć dobry sposób kodowania liczb rzeczywistych za pomocą ciągów liczb naturalnych. Narzuca się zapis dziesiętny liczb – ta metoda daje jednak funkcję nieróżnowartościową; da się w ten sposób dojść do celu, ale droga jest długa. Ciekawym pomysłem jest zastosowanie innego kodowania liczb. Oto ono:
    Niech x będzie liczbą rzeczywistą z przedziału $[0, 1)$. Szukamy liczby naturalnej n takiej, że $x \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1})$ i tę liczbę n uznajemy za pierwszy wyraz ciągu reprezentującego. Następnie zastępujemy x liczbą $\frac{x - (1 - \frac{1}{n})}{(1 - \frac{1}{n+1}) - (1 - \frac{1}{n})}$ i powtarzając procedurę, uzyskujemy drugi wyraz ciągu reprezentującego. I tak dalej. Można udowodnić, że każda liczba jest w ten sposób reprezentowana przez dokładnie jeden nieskończony ciąg liczb naturalnych.