

WSTĘP DO LOGIKI I TEORII MNOGOŚCI
RELACJE RÓWNOWAŻNOŚCI – LISTA ZADAŃ
(na podstawie listy zadań prof. J. Cichonia)

1. Czy następujące relacje na zbiorze liczb całkowitych są relacjami równoważności?

$$\begin{array}{ll} xR_1y \Leftrightarrow 2|x+y, & xR_2y \Leftrightarrow 3|x+y, \\ xR_3y \Leftrightarrow 3|x+2y, & xR_4y \Leftrightarrow 3|(x-1)x(y+1), \\ xR_5y \Leftrightarrow |x-y| \leq 2, & xR_6y \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 2xy, \\ xR_7y \Leftrightarrow x \geq y \vee x^2 \leq y^2, & xR_8y \Leftrightarrow \exists_n |x-y| = n^2. \end{array}$$

2. Niech $f : X \rightarrow Y$. Udowodnij, że relacja R dana wzorem

$$x_1Rx_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

jest relacją równoważności. Jakie są klasy abstrakcji tej relacji? Czy każda relacja równoważności może być wyrażona w tej postaci?

3. Na zbiorze $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ określamy relację R wzorem

$$(p, q)R(p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q.$$

Udowodnij, że jest to relacja równoważności. Jak powiązać klasy abstrakcji tej relacji z liczbami wymiernymi?

4. Niech R_1 i R_2 będą relacjami równoważności. Udowodnij, że $R_1 \cap R_2$ jest relacją równoważności i wyraż klasy abstrakcji $R_1 \cap R_2$ poprzez klasy abstrakcji R_1 i R_2 .
5. Niech R_1 i R_2 będą relacjami równoważności. Czy $R_1 \cup R_2$ oraz $R_1 \circ R_2$ są relacjami równoważności?

Można udowodnić, że $R_1 \circ R_2$ jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$, zaś $R_1 \cup R_2$ jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$. Jak można wyrazić te warunki poprzez klasy abstrakcji tych relacji?