# Przykładowe zadania na I kolokwium z topologii

1. Udowodnić, że funkcja

$$d_H(E,F) = \max\left(\inf_{x\in E}\sup_{y\in F}|x-y|, \inf_{y\in F}\sup_{x\in E}|x-y|\right)$$

jest metryką na zbiorze $X = \{[a,b] : a,b \in \mathbf{R}\}$ wszystkich domkniętych i ograniczonych przedziałów w $\mathbf{R}$.

Wskazówka: Wyrazić $d_H([a,b],[a',b'])$ w prostszy sposób

2. Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ niech $d_n$ będzie metryką na przestrzeni $X$. Udowodnić, że

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \min\left(d_n(x,y), \frac{1}{2^n}\right)$$

również jest metryką na $X$. Rozstrzygnąć, czy $d$ jest słabsza bądź mocniejsza od każdego $d_n$.

3. Niech $X$ będzie zbiorem tych miast Polski, w których jest dworzec PKP i PKS. Określmy funkcję $d(x,y)$ jako czas przejazdu między $x$ i $y$ szybszym środkiem transportu: pociągiem lub autobusem. W czasie podróży nie wolno nam zmieniać środka lokomocji. Zakładamy, że czasy przejazdu z $x$ do $y$ i z $y$ do $x$ są jednakowe. Czy tak określona funkcja $d$ jest metryką na $X$?

4. Dla $x,y \in \mathbf{Z}_+$ niech

$$d(x,y) = \ln\frac{\mathrm{NWW}(x,y)}{\mathrm{NWD}(x,y)}\,.$$

Udowodnić, że $d$ jest metryką na zbiorze liczb całkowitych dodatnich $\mathbf{Z}_+$.

5. Niech $f$ będzie ustaloną, ściśle dodatnią, ciągłą funkcją rzeczywistą. Określmy

$$d(x,y) = \left|\int_x^y f(u)du\right|\,.$$

Udowodnić, że $d$ jest metryką na $\mathbf{R}$. Czy $d$ jest równoważna metryce euklidesowej?

6. Niech $X = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Określmy $d : X \times X \to \mathbf{R}$ wzorem:

$$d(x,y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|\,.$$

- Udowodnić, że $d$ jest metryką na $X$.
- Scharakteryzować ciągi podstawowe w $(X,d)$.

  Wskazówka: Można skorzystać z pojęcia „bycia podstawowym w $\mathbf{R}$ z metryką euklidesową"
- Czy przestrzeń $(X,d)$ jest zupełna?
- Scharakteryzować zbiory domknięte w $(X,d)$.

7. Niech $X = (0,\infty)$ i niech $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ będzie metryką na $X$. Określmy $f : X \to X$ wzorem $f(x) = x^2$. Czy $f$ jest ciągła? Czy jest jednostajnie ciągła? Czy jest lipschitzowska?

8. Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną, i niech $f : X \to X$, $g : X \to X$. Czy jeśli $f$ i $g$ są ciągłe, to również $f \circ g$ i $g \circ f$ są ciągłe? Czy przeciwnie, jeśli $f \circ g$ i $g \circ f$ są ciągłe, to również $f$ i $g$ są ciągłe?

9. Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną. Na $X^2$ wprowadzamy metrykę taksówkową:
$$d_t((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)\,.$$
*Rzutem* (ściślej *rzutem na pierwszą współrzędną*) nazywamy odwzorowanie $\pi : X^2 \to X$ dane wzorem $\pi((x_1, x_2)) = x_1$. Czy odwzorowanie $\pi$ jest ciągłe? Czy obraz $\pi(G)$ zbioru otwartego $G \subseteq X^2$ jest otwarty w $X$? Czy obraz $\pi(F)$ zbioru domkniętego $F \subseteq X^2$ jest domknięty w $X$?

10. Niech $X = C([0, 1]) \times [0, 1]$ będzie przestrzenią metryczną z metryką
$$d((f, t), (g, s)) = \int_0^1 |f(u) - g(u)|\, du + |t - s|\ .$$
Niech $\varphi : X \to \mathbf{R}$ będzie określona wzorem
$$\varphi(f, t) = \int_0^t f(u) du\,.$$
Czy $\varphi$ jest funkcją ciągłą?

11. Niech $X$ będzie zbiorem ciągów rzeczywistych, które od pewnego miejsca są stale równe 0, tj.:
$$X = \left\{a \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \exists_{k\in\mathbf{N}} \forall_{n\geq k} a_n = 0\right\}\ .$$
Rozważmy w $X$ metrykę „supremum”
$$d_\infty(a, b) = \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n - b_n|$$
oraz metrykę „suma”:
$$d_1(a, b) = \sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n - b_n|\,.$$
W przestrzeni $C([0, 1])$ rozważamy metrykę supremum $d_{\text{sup}}$. Niech $\varphi : X \to C([0, 1])$ będzie dane wzorem
$$\varphi(a) = f\,,\ \text{gdzie } f(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n x^n\,.$$
Czy $\varphi$ jest funkcją ciągłą z przestrzeni metrycznej $(X, d_\infty)$ w $(C([0, 1]), d_{\text{sup}})$? Czy $\varphi$ jest funkcją ciągłą z przestrzeni metrycznej $(X, d_1)$ w $(C([0, 1]), d_{\text{sup}})$? Czy odpowiedzi zmieniłyby się, gdyby $[0, 1]$ zastąpić innym odcinkiem?

12. W $\mathbf{R}^3$ rozważamy metrykę euklidesową, w $C([0, 1])$ metrykę supremum. Niech $\varphi : \mathbf{R}^3 \to C([0, 1])$ będzie dane wzorem
$$\varphi(a, b, c) = f\,,\ \text{gdzie } f(x) = ax^2 + bx + c\,.$$
Czy $\varphi$ jest funkcją ciągłą? Czy obraz $\varphi$ jest domknięty?

13. Udowodnić, że jeśli każdy podciąg $(x_{k_n})$ ciągu $(x_n)$ zawiera podciąg $(x_{k_{l_n}})$ zbieżny do $z$, to sam ciąg $(x_n)$ jest zbieżny do $z$. Podać przykład niezbieżnego ciągu $(x_n)$, którego każdy podciąg $(x_{k_n})$ zawiera podciąg $(x_{k_{l_n}})$ zbieżny.

14. W przestrzeni $C([0, 2\pi])$ funkcji ciągłych na odcinku $[0, 2\pi]$ rozważamy metrykę supremum. Znaleźć domknięcie zbioru $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$, gdzie $f_n(x) = \sin(nx)$.
Wskazówka: $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.

15. Rozważmy zbiór $X = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbf{Q}\right\}$. Określamy

$$d(a + b\sqrt{2}, a' + b'\sqrt{2}) = |a - a'| + |b - b'| \,.$$

Czy $(X, d)$ jest przestrzenią metryczną? Jakie jest uzupełnienie $(X, d)$? Czy funkcja $f(x) = x$ jest ciągła z $(X, d)$ w $(R, d_e)$? ($d_e$ oznacza metrykę euklidesową)