
PRZYKŁADOWE ZADANIA NA KOŁOKWIUM Z TOPOLOGII

1. Znaleźć uzupełnienie przestrzeni

$$X = \{(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : (x_n) \text{ jest od pewnego miejsca stały}\}$$

z metryką

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}.$$

2. Udowodnij, że jeśli (X, d) , (Y, e) są przestrzeniami metrycznymi oraz $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją jednostajnie ciągłą, to f przedłuża się do (jednostajnie) ciągłej funkcji z uzupełnienia X w uzupełnienie Y .

Innymi słowy: jeśli (\tilde{X}, \tilde{d}) jest uzupełnieniem (X, d) , zaś $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$ jest zanurzeniem występującym w definicji uzupełnienia, i analogicznie (\tilde{Y}, \tilde{e}) jest uzupełnieniem (Y, e) , a $\psi : Y \rightarrow \tilde{Y}$ odpowiednim zanurzeniem, to istnieje (jednostajnie) ciągła funkcja $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ taka, że $\tilde{f}(\pi(x)) = \psi(f(x))$ dla wszystkich $x \in X$.

WSKAZÓWKA: narysować cztery przestrzenie $X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}$ i działające między nimi odwzorowania. Postępować jak w zadaniach z listy 5.

3. Udowodnij, że iloczyn kartezjański (z metryką „suma” (lub jakąkolwiek jej równoważną)) przestrzeni całkowicie ograniczonych jest całkowicie ograniczony.
4. Kiedy wykres $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ funkcji $f : X \rightarrow Y$ jest zbiorem zwartym?

UWAGA: To zadanie jest trudne! Trzeba podać warunki na X, Y i f , uzasadnić, że są konieczne, oraz że są wystarczające.

WERSJA SPORO ŁATWIEJSZA: Kiedy wykres funkcji *ciągłej* jest zbiorem zwartym?

5. Czy zbiór funkcji

$$\{e^{-ax} : a \geq 0\}$$

jest zwarty w przestrzeni $C(\mathbb{R}_+)$ z metryką supremum? ($\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$)

Czy zbiór funkcji

$$\{e^{-ax} : a \geq 0\}$$

jest zwarty w $C(I)$, gdzie $I = [1, 2]$? Co trzeba dodać, by był zwarty?

6. Wskazać homeomorfizm między domkniętą kulą jednostkową w \mathbf{R}^3 a podzbiorem kostki Hilberta.

7. Wskazać homeomorfizm między zbiorem

$$\left\{ (x_n) : \forall_k |x_k| \leq \frac{1}{2^k} \right\}$$

z metryką

(a) „suma”,

(b) „supremum”

oraz podzbiorem kostki Hilberta.