Lista zadań nr 3: permutacje

(1) Niech $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ oraz $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Wyznacz permutacje:

$$\sigma \cdot \tau, \qquad \tau \cdot \sigma, \qquad \sigma \cdot \sigma, \qquad \tau \cdot \tau, \qquad \tau^{-1}, \qquad \sigma^{-1}.$$

Ile permutacji można otrzymać, mnożąc przez siebie pewną liczbę czynników τ i σ (w dowolnej kolejności)?

(2) Wykonaj poprzednie zadanie dla $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(3) Niech $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$ oraz $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$. Wyznacz $\tau \cdot \sigma$, $\sigma \cdot \tau$, σ^2, σ^3, σ^4 (zapis σ^k oznacza iloczyn k czynników σ).

(4) Przedstaw permutację $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ jako iloczyn pewnej liczby czynników σ i τ z poprzedniego zadania (dla $n = 5$).

(5) Uzasadnij, że jeśli σ jest permutacją, to istnieje najmniejsza dodatnia liczba całkowita r taka, że σ^r jest permutacją stałą I. (Liczbę r nazywa się *rzędem* permutacji σ).

(6) Wyznacz rzędy permutacji pojawiających się w poprzednich zadaniach.