Lista zadań nr 5: parzystość permutacji

(1) Uzasadnij, że permutacja, która jest iloczynem cykli rozłącznych o długościach r_1, r_2, $\dots$, r_k jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $r_1 + r_2 + \ldots + r_k - k$ jest parzysta. Wywnioskuj, że permutacja, które składa się z k cykli (tj. może być zapisana jako iloczyn k rozłącznych cykli, których wyrazy łącznie wyczerpują zbiór $\{1, 2, 3, \dots, n\}$) jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n - k$ jest parzysta.

(2) Oblicz wartości $\operatorname{sign}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\operatorname{sign}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $\operatorname{sign}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $\operatorname{sign}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$, $\operatorname{sign}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9\end{pmatrix}$.

(3) Udowodnij, że dla $n \geq 2$ liczba parzystych permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ jest równa liczbie permutacji nieparzystych. Jak jest dla $n = 1$? A dla $n = 0$?

(4) Niech $\sigma = (1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n)$ oraz $\tau = (1, 2, 3)$. Udowodnij, że każdą (różną od I) permutację parzystą można wyrazić jako iloczyn pewnej liczby czynników σ i τ.