Lista zadań nr 6: grupy alternujące

(1) Niech H będzie podgrupą grupy permutacji G. Udowodnij, że H jest podgrupą normalną G wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych permutacji $\sigma \in G$ oraz $h \in H$ zachodzi $\hat{\sigma} \cdot h \cdot \sigma \in H$.

(2) Niech σ będzie permutacją, zaś $h = (j_1, j_2, \ldots, j_r)$ — cyklem. Udowodnij, że $\hat{\sigma} \cdot h \cdot \sigma = (\sigma(j_1), \sigma(j_2), \ldots, \sigma(j_r))$.

W kolejnych zadaniach H jest podgrupą normalną $\mathbb{A}_n$ dla pewnego $n \geq 2$, różną od $\{I\}$.

(3*) Niech $h \in H$, $h \neq I$ i niech h będzie iloczynem cykli rozłącznych h_1, h_2, …, h_k (gdzie $k \geq 1$). Udowodnij, że jeśli $h_1 = (j_1, j_2, \ldots, j_r)$ jest cyklem długości $r \geq 4$, to $(j_1, j_4, j_3) \in H$.
Wskazówka: oblicz $\hat{h} \cdot \hat{\sigma} \cdot h \cdot \sigma$ dla $\sigma = (j_1, j_2, j_3)$.

(4*) Niech $h \in H$, $h \neq I$ i niech h będzie iloczynem cykli rozłącznych h_1, h_2, …, h_k (gdzie $k \geq 2$). Udowodnij, że jeśli $h_1 = (j_1, j_2, j_3)$ oraz $h_2 = (k_1, k_2, \ldots, k_r)$ (gdzie $r \geq 2$), to $(j_1, k_1, j_3, k_2, j_2) \in H$.
Wskazówka: jak poprzednio, dla $\sigma = (j_1, j_2, k_1)$.

(5*) Wywnioskuj, że jeśli H zawiera permutację, która ma cykl długości co najmniej 3, to H zawiera cykl długości 3.

(6*) Udowodnij, że jeśli H pewien cykl długości 3, to H zawiera każdy cykl długości 3 i wobec tego $H = \mathbb{A}_n$.
Wskazówka: dla zadanego cyklu (k_1, k_2, k_3) dobierz $\sigma \in \mathbb{S}_n$ tak, aby $\hat{\sigma} \cdot h \cdot \sigma = (k_1, k_2, k_3)$. Jeśli $\sigma \in \mathbb{A}_n$, to zadanie jest wykonane. Jeśli zaś $\sigma \notin \mathbb{A}_n$, to $\sigma \cdot (k_1, k_2) \in \mathbb{A}_n$, zatem $(k_3, k_2, k_1) = (k_1, k_2) \cdot (k_1, k_2, k_3) \cdot (k_1, k_2) = (k_1, k_2) \cdot \hat{\sigma} \cdot h \cdot \sigma \cdot (k_1, k_2) \in H$, skąd $(k_1, k_2, k_3) = (k_3, k_2, k_1) \cdot (k_3, k_2, k_1) \in H$.

(7*) Wywnioskuj z poprzednich zadań następujące twierdzenie: jeśli H jest podgrupą normalną $\mathbb{A}_n$ oraz $H \neq \{I\}$, $H \neq \mathbb{A}_n$, to każdy element H (różny od I) jest iloczynem rozłącznych transpozycji.

(8*) Niech $h \in H$, $h \neq I$ i niech h będzie iloczynem transpozycji rozłącznych h_1, h_2, …, h_k (gdzie $k \geq 2$). Udowodnij, że jeśli $h_1 = (a, b)$, $h_2 = (c, d)$, to $(a, c) \cdot (b, d) \in H$.
Wskazówka: rozważ $\sigma = (a, b, c)$.

(9*) Niech $h \in H$, $h \neq I$ i niech h będzie iloczynem transpozycji rozłącznych (a, b) i (c, d). Udowodnij, że jeśli $n \geq 5$, to H zawiera cykl długości 3 i wobec tego $H = \mathbb{A}_n$.
Wskazówka: Jeśli e jest różne od a, b, c oraz d, to $(b, e) \cdot (c, d) \in H$ (rozważ $\sigma = (a, b, e)$), zatem $(a, b, e) = (b, e) \cdot (c, d) \cdot (a, b) \cdot (c, d) \in H$.

(10*) Udowodnij, że dla $n \geq 5$ grupa $\mathbb{A}_n$ jest prosta.