Lista zadań nr 7: grupy rozwiązalne

W poniższych zadaniach „grupa” oznacza grupę permutacji lub grupę ilorazową — albo po prostu zbiór z działaniem o trzech własnościach: działanie jest łączne; istnieje element neutralny I; każdy element σ ma element odwrotny $\hat{\sigma}$.

(1) Udowodnij formalnie, że grupa ilorazowa $G/\{I\}$ jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G jest przemienna. Czy grupa ilorazowa G/G jest przemienna?

(2) Udowodnij, że w tabliczce mnożenia grupy G każdy wiersz i każda kolumna zawierają wszystkie elementy grupy G (każdy dokładnie raz).

(3) Uzasadnij, że jest tylko jedna możliwa tabliczka mnożenia w grupie $G = \{I, a, b\}$, która składa się z trzech elementów. Wywnioskuj, że grupy trzyelementowe są przemienne.

(4) Utwórz tabliczkę mnożenia w grupie $H = \{I, a, b, c\}$, gdzie $a = (1, 2) \cdot (3, 4)$, $b = (1, 3) \cdot (2, 4)$, $c = (1, 4) \cdot (2, 3)$.

(5) Udowodnij, że są tylko cztery możliwe tabliczki mnożenia w grupie $G = \{I, a, b, c\}$, która składa się z czterech elementów. Wywnioskuj, że grupy czteroelementowe są przemienne.

(6) Uzasadnij, że grupy $\mathbb{A}_4$ oraz $\mathbb{S}_4$ są rozwiązalne. Wskazówka: $\mathbb{S}_4 \rhd \mathbb{A}_4 \rhd H \rhd \{I\}$ dla H z zadania (4).

(7) Udowodnij, że jeśli $\sigma \in G$, to zbiór wszystkich potęg σ (tj. permutacji postaci $\sigma \cdot \sigma \cdot \ldots \cdot \sigma$) tworzy podgrupę grupy G (nazywaną *podgrupą generowaną przez* σ). Wywnioskuj, że rząd permutacji σ jest dzielnikiem G.

(8) Uzasadnij, że w grupie G, która składa się z p elementów, istnieje element a taki, że $G = \{I, a, a^2, \ldots, a^{p-1}\}$, gdzie a^k to iloczyn k czynników równych a. Wywnioskuj, że każda taka grupa jest przemienna.

(9) Wywnioskuj, że każda grupa nieprzemienna ma co najmniej sześć elementów.

(10) Uzasadnij, że są tylko dwa typy grup G o czterech elementach: albo $G = \{I, a, a^2, a^3\}$, albo $G = \{I, a, b, c\}$ z tabliczką mnożenia taką, jak w zadaniu (4).

(11) Scharakteryzuj w powyższy sposób wszystkie możliwe grupy o sześciu elementach.