Lista zadań nr 8: komutanty

W poniższych zadaniach „grupa” oznacza grupę permutacji lub grupę ilorazową — albo po prostu zbiór z działaniem o trzech własnościach: działanie jest łączne; istnieje element neutralny I; każdy element σ ma element odwrotny $\hat{\sigma}$.

(1) Udowodnij, że część wspólna dwóch podgrup jest podgrupą, zaś część wspólna podgrup normalnych jest podgrupą normalną.

(2) Sprawdź, że jeśli H jest podgrupą normalną G oraz $\tilde{H}$ oznacza część wspólną G' i H, to $(G/H)' = G'/\tilde{H}$.

(3) Udowodnij, że jeśli H jest podgrupą G, to H' jest podgrupą G'.

(4) Udowodnij, że jeśli H jest podgrupą normalną G, to H' jest podgrupą normalną G'.

W poniższych zadaniach „opis” grupy to coś, co umożliwia wypisanie elementów grupy i szybkie ich mnożenie (w szczególności więc pozwala szybko stwierdzić, ile grupa ma elementów).

(5) Opisz grupę permutacji generowaną przez $\sigma = (1,2,3) \cdot (4,5,6)$ oraz $\tau = (1,4) \cdot (2,5) \cdot (3,6)$. Wskazówka: zbadaj, czy σ i τ są przemienne!

(6) Opisz grupę permutacji generowaną przez $\sigma = (1,2,3) \cdot (4,5,6)$ oraz $\tau = (1,6) \cdot (2,5) \cdot (3,4)$.

(7) Opisz grupę permutacji generowaną przez $\sigma = (1,2,3)$ oraz $\tau = (1,4) \cdot (2,5) \cdot (3,6)$. Wskazówka: wyznacz $\rho = \tau \cdot \sigma \cdot \tau$ i sprawdź, że: $\sigma \cdot \rho = \rho \cdot \sigma$, $\tau \cdot \sigma = \rho \cdot \tau$, $\tau \cdot \rho = \sigma \cdot \tau$.

(8) Czy istnieje w miarę prosty opis grupy permutacji generowanej przez $\sigma = (1,2,3) \cdot (4,5,6)$ oraz $\tau = (1,2) \cdot (3,4) \cdot (5,6)$?

(9) W każdym z powyższych zadań wyznacz komutant opisanej grupy i sprawdź, czy jest ona rozwiązalna.