PRZYKŁADOWE ZADNIA NA EGZAMIN

ROBERT RALOWSKI

Poniżej znajdą Państwo przykłady, jakie mogą sie pojawić na egzaminie z analizy matematycznej 1.

(1) Granica ciągu liczbowego:

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n, \quad b_n = \frac{(\sqrt[3]{n}+1)^{33}}{(\sqrt{n}+1)^{22}}, \quad c_n \frac{2+n\cdot \sin n}{n^2+1},$$

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{3n}, \quad e_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(2) Granica funkcji można stosować (regułę d'Hopitala):

- Czy istnieje granica funkcji $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$,
- Granice funkcji:

$$\text{e)} \lim_{x\to -\infty} e^{x+\sin^2 x}; \quad \text{f)} \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot\cos\frac{1}{x^2}; \quad \text{g)} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\sin x}{x^2}, \quad \text{g)} \lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3}{5^x+2}.$$

$$\text{a)} \lim_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{\cos 5x}; \quad \text{b)} \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\cdot arctg\, x}{\ln(1+\frac{1}{x^2})}; \quad \text{c)} \lim_{x\to -\infty} \frac{\sin\ln(2^x+1)}{\sin\ln(3^x+1)}; \quad \text{c)} \lim_{x\to 1^+} x^{\ln(x-1)}.$$

(3) Asymptoty funkcji:

$$\text{a)} \frac{x^3+x^2}{x^2-4}; \quad \text{b)} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}; \quad \text{c)} \frac{\sin x}{\pi - x}; \quad \text{d)} \frac{\cos(\pi x)}{2^x-8}; \quad \text{e)} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}; \quad \text{f)} \frac{x^3}{(x+1)^2}.$$

(4) Ciągłość funkcji: Wyznaczyć parametry $a, b \in \mathbb{R}$, aby funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{dla } |x| < 2 \\ x\cdot\sqrt{x^2-4} & \text{dla } |x| \geq 2, \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

(5) Przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne dla zadanych funkcji:

$$a)\ xe^{-x^2}, \quad b)\ \frac{x}{1-x^3}, \quad c)\ x^2 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

(6) Wartość największa i najmniejsza dla funkcji ciągłej f na $[a, b]$:

$$f(x) = arctg\, x - \frac{x}{2} \ \text{ na } [0,2], \quad f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 5 \ \text{ na } [-5,5].$$

(7) Całki nieoznaczone:

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx, \quad \int \frac{6x+3}{x^2+x+4}\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2}; \int \frac{x+2}{x(x-2)}\, dx, \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

$$\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx, \quad \int \sin^4 x\, dx, \quad \int \sin^2 2x \sin^2 x\, dx, \quad \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\, dx, \quad \int \frac{dx}{1-\operatorname{tg} x}.$$

(8) Całki oznaczone i ich zastosowanie:

- $$\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x - 5)\, dx, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg\, x\, dx, \int_e^{e^2} x \ln x\, dx.$$
- wartość średnia z $f(x) = \sin^2 x$ na $[0, \pi]$.
- pole figury ograniczonej krzywymi:

$$y = x^2 - 2x + 3,\ y = x + 3,$$

$$y = -\ln(x+2)\ \ x = 0,\ y = 0,$$

$$y = \frac{4}{x^2+2},\ y = 1.$$

- objętość bryły obrotowej powstałej z wykresu funkcji na zadanym przedziale względem osi OX:

$$f(x) = 3 - x, \text{ na } [0, 3],$$

$$f(x) = \sin x, \text{ na } [0, \pi],$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \text{ na } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$