

# LISTY ZADAŃ DO KURSU ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Zadania przeznaczone są do rozwiązywania na ćwiczeniach oraz samodzielnie. Ostatnia lista POWTÓRKA może posłużyć jako przygotowanie do kartkówki. Zadania z egzaminów na ocenę celującą z lat poprzednich można znaleźć na stronie Wydziału Matematyki: [www.wmat.pwr.edu.pl](http://www.wmat.pwr.edu.pl).

## LISTA 0 (materiał do samodzielnego powtórzenia).

### Działania w zbiorze liczb rzeczywistych

W zadaniach 0.2 – 0.5  $n \in \mathbb{N}$ , natomiast  $a, b, x, y$  są liczbami rzeczywistymi, dla których występujące w zadaniach wyrażenia i wykonywane przekształcenia mają sens.

**0.1.** Przypomnieć kolejność wykonywania działań w wyrażeniach bez nawiasów oraz w wyrażeniach z nawiasami. Obliczyć wartość wyrażenia:  $4 + 6 : 2 \cdot 3 - 8 \cdot 2$ . Wstawić nawiasy tak, aby wartość otrzymanego wyrażenia była równa.

(a)  $-1$ , (b)  $-11$ , (c)  $-10$ .

**0.2.** Uzupełnić i zapamiętać wzory „skróconego mnożenia”:

(a)  $(a + b)^2 = \dots$ , (b)  $(a + b)^3 = \dots$ , (c)  $(a + b)(a - b) = \dots$ , (d)  $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = \dots$ .

Czy można w powyższych wyrażeniach zastąpić „ $b$ ” przez „ $-b$ ”? Co otrzymamy?

Uprościć wyrażenia wymierne:

(a)  $\frac{3a^2 - 6ab + 3b^2}{6a^2 - 6b^2}$ , (b)  $\frac{9 + 6x + x^2}{x^2 - 9}$ , (c)  $\frac{a^3 + 8}{a^2 - 4}$ , (d)  $\frac{1 - x^3}{3x^2 + 3x + 3}$ ,

(e)  $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$ , (f)  $\frac{2x^2 + 4xy + 2y^2}{9x^2 - 9y^2}$ , (g)  $\frac{x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^4 + 4x^2 + 4}$ .

**0.3.** Zapisać wyrażenia w prostszej postaci podając wykorzystywane prawa działań na potęgach

(a)  $\frac{2^n + 3 \cdot 2^{n+2}}{4^{2n}}$ , (b)  $\frac{(\sqrt{2})^{3n+2} - (\sqrt{8})^n}{2^n}$ , (c)  $\frac{21 \cdot 27^n}{9^{n+2} + 3^{2n+1}}$ , (d)  $\left(\frac{1}{\sqrt{a^3}} \cdot b \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a}} \cdot \sqrt[3]{a^2}\right)^3$ .

**0.4.** Wykonać działania. Wynik zapisać w najprostszej postaci.

(a)  $\frac{b}{ay + ax} - \frac{a}{by + bx}$ , (b)  $\frac{1}{a - b} - \frac{3ab}{a^3 - b^3} - \frac{b - a}{a^2 + ab + b^2}$ ,

(c)  $\frac{8x}{x - 9x^3} + \frac{3x}{x + 3x^2} - \frac{2 - 6x}{(1 - 3x)^2}$ , (d)  $\frac{x\sqrt{4 - x^2} - (2 - x^2) \cdot \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}}{4 - x^2}$ .

**0.5.** W podanych wyrażeniach usunąć niewymierność z mianownika

(a)  $\frac{1}{4 + \sqrt{1 + x}}$ , (b)  $\frac{n - 2}{\sqrt{n} + \sqrt{2}}$ , (c)  $\frac{n + 1}{\sqrt{5n + 4} - \sqrt{4n + 3}}$ ,  
(d)  $\frac{a - b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$ , (e)  $\frac{x}{\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 1}}$ , (f)  $\frac{n - 1}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n} + 1}$ .

**LISTA 1.**  
(na 3-4 ćwiczzenia)

**Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości o funkcjach**

**1.1. Zdanie logiczne. Forma zdaniowa. Kwantyfikatory.**

Dla zdań, będących zdaniami logicznymi, podać ich wartość logiczną.

(a)  $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$ ,      (b)  $x^2 - 7 < 0$ ,      (c)  $\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} x^2 - 7 < 0$ ,  
(d)  $\bigvee_{x \in \mathbf{R}} x^2 - 7 < 0$ ,      (e)  $\bigvee_{x \in \mathbf{R} - \{0, -2\}} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ ,      (f)  $\bigwedge_{x \in \mathbf{R}} \bigvee_{y \in \mathbf{R}} x^2 - y^2 = 0$ .

**1.2. Negacja. Równoważność. Prawa de Morgana dla koniunkcji i alternatywy.**

Zapisać przy użyciu spójników logicznych „i”, „lub” rozwiązanie równania (nierówności). Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne spełniają podany warunek.

(a)  $(x - 3)(y + 2) = 0$ ,      (b)  $(x - 3)(y + 2) \neq 0$ ,      (c)  $(x - 3)(y + 2) > 0$ ,      (d)  $4x^2 - y^2 < 0$ ,  
(e)  $\frac{x - y}{x + y} = 0$ ,      (f)  $\frac{y - 2}{x - y + 1} > 0$ ,      (g)  $\frac{2x - y}{x + y} \leq 0$ ,      (h)  $\frac{x^2 + y - 1}{x^2 - y^2} \geq 0$ .

**1.3. Implikacja. Twierdzenie. Prawo kontrapozycji.**

**(A)** Prawdziwe jest twierdzenie: *Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 12, to jest podzielna przez 3.*

Wskazać założenie oraz tezę twierdzenia.

Na podstawie powyższego twierdzenia podać:

- (a) warunek wystarczający podzielności przez 3. Dlaczego nie jest to warunek konieczny?
- (b) warunek konieczny podzielności przez 12. Dlaczego nie jest to warunek wystarczający?
- (c) Liczba naturalna nie jest podzielna przez 12. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o podzielności tej liczby przez 3?
- (d) Liczba naturalna jest podzielna przez 3. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o podzielności tej liczby przez 12?
- (e) Liczba naturalna nie jest podzielna przez 3. Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o podzielności tej liczby przez 12?
- (f) Sformułować warunek konieczny i wystarczający podzielności przez 3.

**(B)** Niech  $x, y \in \mathbf{R}$ . Prawdziwa jest implikacja:

$$(x > 0 \text{ i } y > 0) \implies (xy > 0).$$

Wskazać założenie oraz tezę twierdzenia.

(a) Wiadomo, że  $\alpha > 1$  i  $\beta > -1$ . Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o znaku iloczynu  $(\alpha - 1) \cdot (\beta + 1)$ ? A o znaku iloczynu  $\alpha \cdot \beta$ ? Podać przykłady.

(b) Wiadomo, że  $ab > 0$ . Czy twierdzenie pozwala wyciągnąć wniosek o znaku liczby  $a$ ? Podać przykłady.

(c) Wiadomo, że  $uv \leq 0$ . Jaki wniosek o liczbach  $u$  i  $v$  pozwala wyciągnąć twierdzenie?

#### 1.4. Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów.

Zapisać w równoważnej postaci zdania:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \neg \left( \bigwedge_{x \in \mathbf{R}} 2^x = 2^{-x} \right), & \text{(b)} \quad & \neg \left( \bigvee_{x < 0} x^2 = x^4 \right), \\ \text{(c)} \quad & \neg \left( \bigvee_{M \in \mathbf{R}} \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} \frac{n^2 + 1}{n} < M \right), & \text{(d)} \quad & \neg \left( \bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{n_0 \in \mathbf{N}} \bigwedge_{n \in \mathbf{N}} (n > n_0) \implies \left( \frac{n}{n+5} < \epsilon \right) \right). \end{aligned}$$

1.5. Wyznaczyć dziedziny naturalne funkcji. Zbadać, która z nich jest parzysta, która nieparzysta, a która nie ma żadnej z tych własności.

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{|x| + 3}{x^2 - 9}, \quad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{x}{6x^2 - x - 1}, \quad \text{(c)} \quad f(x) = \sqrt{3x - x^3}, \quad \text{(d)} \quad f(x) = \sqrt[3]{8 - \frac{1}{x^3}}.$$

1.6. Korzystając z równania pęku prostych  $y - y_0 = a(x - x_0)$  oraz interpretacji współczynnika  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  napisać równanie prostej:

- przechodzącej przez punkty  $(2, 3)$ ,  $(-1, -3)$ ,
- przechodzącej przez punkt  $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$  i równoległej do prostej  $y = -2x$ ,
- przechodzącej przez punkt  $(-2, 1)$  i prostopadłej do prostej  $x - 3y + 1 = 0$ .

1.7. Przekształcając wykres odpowiedniej funkcji liniowej narysować wykres podanej funkcji. Odczytać z wykresu zbiór wartości.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & f(x) = |4 - 2x|, & \text{(b)} \quad & f(x) = 4 - 2|x|, \\ \text{(c)} \quad & f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}, & \text{(d)} \quad & f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{dla } |x| > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

1.8. Przekształcając wykres funkcji  $y = ax^2$  naszkicować wykres funkcji  $y = f(x)$ . Odczytać z wykresu zbiór wartości.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & f(x) = x^2 - 4x + 5, & \text{(b)} \quad & f(x) = x^2 - 2|x| + 1, \\ \text{(c)} \quad & f(x) = -4 - 4x - 2x^2, & \text{(d)} \quad & f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x). \end{aligned}$$

1.9. Przekształcając wykres funkcji  $y = \frac{a}{x}$  lub  $y = \frac{a}{x^2}$  naszkicować wykres funkcji  $y = f(x)$ . Odczytać z wykresu zbiór wartości.

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad \text{(c)} \quad f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}, \quad \text{(d)} \quad f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 4x + 4}.$$

1.10. Napisać wzory określające funkcje złożone  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$ ,  $g \circ g$  dla podanych funkcji  $f$  i  $g$ . Naszkicować wykresy funkcji  $y = f(g(x))$  oraz  $y = g(f(x))$ .

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & f(x) = x^2, \quad g(x) = x - 2, & \text{(b)} \quad & f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 4x^2, \\ \text{(c)} \quad & f(x) = |x|, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}, & \text{(d)} \quad & f(x) = x^2 - 2, \quad g(x) = \operatorname{sgn} x. \end{aligned}$$

**1.11.** Zaproponować przedstawienie funkcji złożonych w postaci  $g \circ h$ . Czy jest tylko jedna para funkcji  $g, h$  takich, że  $f = g \circ h$ ?

(a)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ , (b)  $f(x) = \frac{1}{x^4 + 3}$ , (c)  $f(x) = 4x^2 + 12x$ .

**1.12.** Obliczyć (podając wykorzystywaną własność logarytmu):

$$\log_2(2\sqrt{2} + 6\sqrt[4]{4}), \quad \log(2^6 + 6^2), \quad \log_3 2 - \log_3 18, \quad 3 \log 5 + 0,5 \log 64, \quad \log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6},$$
$$\ln e^3, \quad 2^{\log_2 3}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 5}, \quad 3^{\log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{6}}{2}}, \quad e^{2 \ln 10}, \quad e^{1 - \ln 10}, \quad \log_2 3 \cdot \log_3 8.$$

**1.13.** Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów, których współrzędne  $(x, y)$  spełniają podany warunek

(a)  $\log_2 y = \log_2 x + \log_2 3$ , (b)  $\log_{0,5} y = 2 \log_{0,5}(x + 1)$ , (c)  $\log |y| = \log |x| + \log 0,5$ .

**1.14.** Naszkicować wykresy funkcji

(a)  $f(x) = 2^{|x|}$ , (b)  $f(x) = \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 \right|$ , (c)  $f(x) = 1 + \frac{1}{e^x}$ , (d)  $f(x) = -e^{-|x|}$ ,  
(e)  $f(x) = \log_2(x - 1)$ , (f)  $f(x) = \left| \log_{0,5} x \right|$ , (g)  $f(x) = \ln |x|$ , (h)  $f(x) = \ln x^2$ .

**1.15.** Rozwiązać równania i nierówności

(a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{(x-2)^2 - 5x} = \left(\frac{1}{4}\right)^5$ , (b)  $4^x + 24 = 5 \cdot 2^{x+1}$ , (c)  $|2^x - 5| < 2$ ,  
(d)  $|3 \log x - 1| = 2$ , (e)  $\log_2(x + 1) - \log_2 x < 1$ , (f)  $\ln^2 x + \ln x \geq 2$ .

**1.16.** Wyprowadzić wzór określający funkcję odwrotną do funkcji  $f$ . Naszkicować w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $y = f(x)$  i  $y = f^{-1}(x)$ .

(a)  $f(x) = \log_2(x + 1)$ , (b)  $f(x) = 1 - 2^x$ , (c)  $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ ,  
(d)  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  dla  $x \geq 1$ , (e)  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  dla  $x \leq 1$ .

**1.17.** Wykorzystując okresowość funkcji i koło trygonometryczne obliczyć wartości wyrażeń

(a)  $\cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{4}{3}\pi$ , (b)  $\sin \frac{13}{6}\pi + \sin \frac{11}{3}\pi$ , (c)  $\cos \frac{14}{3}\pi + \cos \frac{19}{6}\pi$ ,  
(d)  $\sin \left(-\frac{9}{4}\pi\right) + \cos \left(-\frac{13}{4}\pi\right)$ , (e)  $\sin \frac{17}{2}\pi + \cos \frac{17}{2}\pi$ , (f)  $\operatorname{tg} \frac{20}{3}\pi + \operatorname{ctg} \frac{19}{3}\pi$ .

**1.18.** Udowodnić tożsamości. Określić ich dziedziny.

(a)  $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ , (b)  $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ , (c)  $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ , (d)  $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ ,  
(e)  $1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}$ , (f)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 0,5 \sin^2 2x$ .

**1.19.** Krzywą daną równaniem  $y = a \sin(bx + c) + d$  dla ustalonych parametrów  $a \neq 0, b \neq 0, c, d$  nazywamy sinusoidą. Uzasadnić, że każda z poniższych krzywych jest sinusoidą i naszkicować ją.

(a)  $y = \sin x \cos x$ ,      (b)  $y = (\sin x + \cos x)^2$ ,      (c)  $y = \cos^2 x$ .

**1.20.** Naszkicować wykres funkcji  $y = f(x)$ . Odczytać z wykresu okres podstawowy oraz zbiór wartości funkcji.

(a)  $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,    (b)  $f(x) = \sin x + |\sin x|$ ,    (c)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ,    (d)  $f(x) = |\operatorname{ctg}(\pi x)|$ .

**1.21.** Rozwiązać równania i nierówności.

(a)  $\cos 2x = 0$ ,      (b)  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ ,      (c)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$ ,  
(d)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$ ,      (e)  $\cos \frac{x}{3} > 0$ ,      (f)  $\operatorname{ctg}^2 x < 1$ .

**1.22.** Obliczyć wartości wyrażeń

(a)  $w = \arcsin \frac{x}{2} - \arccos \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ , jeśli  $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{6}$ ;  
(b)  $w = \arcsin(-x) + \arccos 2x + \operatorname{arctg} 2x$ , jeśli  $\arccos x = \frac{2\pi}{3}$ ;  
(c)  $\operatorname{tg}\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$ ;      (d)  $\sin\left(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{8}{17}\right)$ .

**1.23.** Rozwiązać równania wykorzystując funkcje cyklotometryczne

(a)  $\operatorname{tg} 2x = 5$ ,    (b)  $\sin x = \frac{1}{3}$ ,    (c)  $\sin x = -\frac{1}{4}$ ,    (d)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,    (e)  $\cos x = -\frac{3}{4}$ .

*Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skrypcie:*

*M. Gewert, Z. Skoczylas, Wstęp do analizy i algebry. Teoria, przykłady, zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2014.*

**LISTA 2**  
(na 1 ćwiczenia)

**Ciągi liczbowe**

**2.1.** Uzasadnić, że podane ciągi są monotoniczne i ograniczone.

(a)  $a_n = \frac{n}{2n+1}$ ,      (b)  $b_n = \frac{2^n}{3^n+2}$ ,      (c)  $c_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ,      (d)  $d_n = \sin \frac{\pi}{2n+1}$ ,  
(e)  $e_n = \frac{(n+2)^2}{2^{n+2}}$ ,      (f)  $f_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$ ,      (g)  $g_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$ .

**2.2.** Korzystając z odpowiedniej definicji granicy ciągu liczbowego, uzasadnić, że

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$ ,      (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n} = +\infty$ ,      (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n+2} \neq 2$ .

**2.3.** Uzasadnić, podając odpowiednie przykłady, że poniższe wyrażenia są nieoznaczone

$\frac{0}{0}$ ,       $\frac{\infty}{\infty}$ ,       $0 \cdot \infty$ ,       $\infty - \infty$ ,       $1^\infty$ ,       $\infty^0$ ,       $0^0$ .

**2.4.** Obliczyć granice ciągów liczbowych.

(a)  $a_n = \frac{2n-3}{3n+4}$ ,      (b)  $b_n = \frac{n^2+3n-8}{2n+5}$ ,      (c)  $c_n = \frac{n^2+n-3}{n^3+2n+1}$ ,  
(d)  $d_n = \frac{(2n^3+3)^8}{(2n^4+7)^6}$ ,      (e)  $e_n = \frac{n+\sqrt{n^3+7}}{\sqrt[3]{n^2+5}+4n}$ ,      (f)  $f_n = \frac{8^{n+2}+2^n}{2^{3n+1}+3^n+4}$ ,  
(g)  $g_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ ,      (h)  $h_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$ ,  
(i)  $i_n = \sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+3}$ ,      (j)  $j_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n+23}$ ,  
(k)  $k_n = \sqrt{9^n+4 \cdot 3^n+1} - \sqrt{9^n+3}$ ,      (l)  $l_n = n^{30} - 2 \cdot n^{21} - 3 \cdot n^9 + 3$ ,  
(m)  $m_n = 7^n - 2 \cdot 5^{2n} + 3 \cdot 9^{n+5} + 4$ ,      (n)  $m_n = \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n+3}$ ,      (o)  $o_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{n^2}$ ,  
(p)  $p_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{1-3n}$ ,      (r)  $r_n = \left(\frac{4n+1}{2n-1}\right)^{n+6}$ ,      (s)  $s_n = \left(\frac{3^n+2^n}{5^n+3^n}\right)^n$ .

**2.5.** Dla danego ciągu  $(a_n)$  dobrać (odgadnąć i uzasadnić) ciąg  $(b_n)$  postaci  $b_n = n^p$  lub  $b_n = \alpha^n$  tak, aby ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  były tego samego rzędu. (Mówimy, że ciągi  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  są tego samego rzędu, jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ , dla pewnej liczby dodatniej  $k$ .)

(a)  $a_n = \frac{1}{n^2+4n+3}$ ,      (b)  $a_n = \frac{n^2}{n^3+7}$ ,      (c)  $a_n = \sqrt{n+9} - \sqrt{n+1}$ ,  
(d)  $a_n = \frac{1}{3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n}$ ,      (e)  $a_n = \frac{3^n}{4n+5^n}$ ,      (f)  $a_n = \frac{4^{n+2}}{5 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 3^n}$ .

*Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skrypcie:*

*M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018, rozdział 2.*

**LISTA 3**  
(na 2 ćwiczenia)

**Granice funkcji. Asymptoty. Funkcje ciągłe**

**3.1.** Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki

- (a)  $f(0) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi$ ;  
(b)  $g(0) = 4$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  nie istnieje;  
(c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$  nie istnieje,  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) \neq h(0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty$ ,  $h(3) < 0$ .

**3.2.** Obliczyć granice

- (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 - x^3}{x^2 - 4}$ , (d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^2 - 4}$ ,  
(e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{|x^2 - 1|}$ , (f)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{x - 1}$ , (g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} + x^2}{x + \sqrt{x}}$ , (h)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} + x^2}{x + \sqrt{x}}$ ,  
(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x}$ , (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 3x}$ , (k)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} \frac{2}{x}}$ , (l)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin 6x}$ .

**3.3.** Uzasadnić, że podane granice funkcji nie istnieją

- (a)  $\lim_{x \rightarrow -0,5} \frac{2x - 1}{4x^2 - 1}$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{1/x}$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x - 3^x}$ , (d)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \operatorname{sgn}(\sin x)$ .

**3.4.** Korzystając z odpowiednich twierdzeń (o trzech funkcjach, o iloczynie funkcji ograniczonej i funkcji zbieżnej do zera, o dwóch funkcjach) wyznaczyć granice

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2}$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x^2}{x}$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x^2}{3x + \cos \sqrt{x}}$ , (d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \sin \frac{1}{x}}{x^3}$ .

**3.5.** Narysować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki

- (a) prosta  $x = 1$  jest asymptotą pionową obustronną funkcji  $f$ ,  $y = 2$  jest asymptotą poziomą w  $-\infty$ ,  $y = -x + 2$  jest asymptotą ukośną w  $+\infty$ ;  
(b) prosta  $x = -2$  jest asymptotą pionową lewostronną funkcji  $g$  i nie jest asymptotą pionową prawostronną, funkcja  $g$  nie ma asymptoty w  $-\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$ ;  
(c) prosta  $x = 0$  jest asymptotą pionową obustronną funkcji  $h$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  nie istnieje,  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) + 2x] = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) + x - 1] = 0$ .

**3.6.** Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji  $f$ . Naszkicować hipotetyczny wykres.

$$(a) f(x) = \frac{8x^3 + 1}{4x^2 - 1}, \quad (b) f(x) = \frac{x^2 - 6}{x - 1}, \quad (c) f(x) = \frac{3}{2^x - 8},$$

$$(d) f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}, \quad (e) f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}, \quad (f) f(x) = \frac{\cos x}{2\pi - x}.$$

**3.7.** Czy można dobrać parametry  $a, b \in \mathbf{R}$  tak, aby podana funkcja była ciągła na  $\mathbf{R}$ . Wykonać rysunek.

$$(a) f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{dla } x < 0 \\ a - x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}, \quad (b) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{dla } |x| \leq 1 \\ ax^2 + bx & \text{dla } |x| > 1 \end{cases},$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{dla } x \neq 2 \\ a & \text{dla } x = 2 \end{cases}, \quad (d) f(x) = \begin{cases} \frac{x + 1}{x^2 - 1} & \text{dla } |x| \neq 1 \\ a & \text{dla } x = -1 \\ b & \text{dla } x = 1 \end{cases}.$$

**3.8.** Uzasadnić, korzystając z twierdzenia Darboux, że równanie ma rozwiązanie we wskazanym przedziale. W przykładach (a), (b), (c) uzasadnić jednoznaczność rozwiązania. Podać graficzną interpretację równania.

$$(a) \sin x = 2 - 2x, \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \quad (b) e^x = \frac{1}{x^2}, \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right);$$

$$(c) x^2 = -\ln x, \quad (0, +\infty); \quad (d) 10 \sin(\pi x) = x + 1, \quad \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

**3.9.** Uzasadnić, że równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie i wyznaczyć je (nie korzystając z kalkulatora) z błędem nie większym niż 0,25.

$$(a) x^3 + 6x = 2, \quad (b) x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0, \quad (c) x^3 = 4 + 2^{-x}.$$

*Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skrypcie:*

*M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018, rozdział 3.*



**LISTA 4**  
(na 3-4 ćwiczenia)

**Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej**

**4.1.** Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne jednostronne oraz pochodna podanej funkcji we wskazanym punkcie. Naszkicować wykres funkcji.

(a)  $y(x) = |x^2 - 4|$ ,  $x_0 = 2$ ;      (b)  $f(x) = |\sin^3 x|$ ,  $x_0 = 0$ ;  
(c)  $g(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$ ,  $x_0 = 0$ ;      (d)  $h(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ (x - 2)^2 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ ,  $x_0 = 1$ .

**4.2.** Korzystając z wzoru na pochodną funkcji  $f(x) = x^\alpha$  i reguł różniczkowania, obliczyć pochodną funkcji:

(a)  $y = \sqrt{2}x^4 + 4\sqrt{x} - x\sqrt{x} + 3x^2\sqrt[3]{x}$ ,      (b)  $y = 5 \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x \cdot \sqrt{x}} + \frac{1}{3x \cdot \sqrt[3]{x}}$ ,  
(c)  $y = \frac{x}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{5x^2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{7x^2} + \frac{x^{-2}}{x}$ ;      (d)  $y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9x}} - \frac{8}{(2x)^2} + \sqrt[3]{\frac{x}{16}} + \sqrt[4]{2^3}$ .

**4.3.** Korzystając z wzoru na pochodną iloczynu lub ilorazu, obliczyć pochodną funkcji:

(a)  $y = e^x \cdot \cos x$ ,      (b)  $y = x^2 \cdot \ln x$ ,      (c)  $y = x \cdot 2^x \cdot \sin x$ ,      (d)  $y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} x$ ,  
(e)  $y = \frac{x^2}{x^2 + x + 2}$ ,      (f)  $y = \frac{2^x - 3^x}{x}$ ,      (g)  $y = \frac{x \ln x}{2x - 3}$ ,      (h)  $y = \frac{x \sin x + \cos x}{\sin x - x \cos x}$ .

**4.4.** Obliczyć pochodną funkcji:

(a)  $y = \ln(2x)$ ,      (b)  $y = \frac{1}{(2x - 3)^2}$ ,      (c)  $y = 3x \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ ,      (d)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ,  
(e)  $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ ,      (f)  $y = \sin^2 x$ ,      (g)  $y = \cos^3\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ,      (h)  $y = x^3 \cos^2 \pi x$ .

**4.5.** Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji  $y = f(x)$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$ . Sporządzić rysunek.

(a)  $f(x) = \sin 2x$ ,  $x_0 = 0$ ;      (b)  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $x_0 = 1,5\pi$ ;      (c)  $f(x) = \ln(x - 3)$ ,  $f(x_0) = 0$ .

**4.6.** Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji  $y = f(x)$ , która ma podaną własność.

(a)  $f(x) = x \cdot \ln x$ , styczna jest równoległa do prostej  $5x + 5y - 1 = 0$ ;  
(b)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ , styczna jest prostopadła do prostej  $2x - y = 0$ ;  
(c)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ , styczna jest równoległa do osi  $OX$ ;  
(d)  $f(x) = 3 - x^2$ , styczna tworzy kąt  $\frac{\pi}{3}$  z dodatnim kierunkiem osi  $OX$ .

4.7. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia:

(a)  $\frac{1}{\sqrt{4,02}}$ , (b)  $\frac{\ln 0,99}{1,99}$ , (c)  $1,03 \cdot \sqrt[3]{8,03}$ , (d)  $\operatorname{tg}^2 44^\circ$ .

4.8. W wyniku pomiaru długości krawędzi czworościanu foremnego otrzymano  $1,00 \pm 0,01$  m. Z jakim błędem bezwzględnym i względnym zostaną obliczone: wysokość, pole powierzchni i objętość tego czworościanu?

4.9. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)}{\ln x}$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{3^x}$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$ ,  
(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln x)$ , (e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$ , (f)  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\pi - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

4.10. Wyznaczyć wszystkie asymptoty funkcji:

(a)  $f(x) = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2}$ , (b)  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ , (c)  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$ , (d)  $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ .

4.11. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji. Naszkicować ich wykresy.

(a)  $y(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ , (b)  $y(x) = \frac{x^2}{x+1}$ , (c)  $f(x) = x^3 \cdot e^{6x}$ , (d)  $g(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$ .

4.12. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji na wskazanym przedziale:

(a)  $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ ,  $[0, 5]$ , (b)  $f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$ ,  $[0, 2]$ , (c)  $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ ,  $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ .

4.13.

(a) Wyznaczyć dwie liczby dodatnie, których suma jest równa 20, a iloczyn kwadratu pierwszej i trzeciej potęgi drugiej ma wartość największą.

(b) Zbadać, który z prostopadłościanów o podstawie kwadratowej i danym polu powierzchni całkowitej ma największą objętość.

(c) Firma spedycyjna przyjmuje zlecenie przewozu prostopadłościennych paczek, dla których suma wysokości i obwodu podstawy jest nie większa niż 108 cm. Znaleźć wymiary paczki o kwadratowej podstawie i największej objętości, która może być przesłana za pośrednictwem tej firmy.

(d) Przez punkt  $P = (1, 3)$  poprowadzić prostą tak, aby wraz z dodatnimi półosią układu współrzędnych tworzyła trójkąt o najmniejszym polu.

4.14. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji:

(a)  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ , (b)  $g(x) = (x+1) \cdot e^{-2x}$ , (c)  $h(x) = x \cdot \ln^2 x$ , (d)  $h(x) = \sin x - \sin^2 x$ .

*Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skrypcie: M. Gewert, Z. Skoczyła, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018, rozdział 4, 5.*

**LISTA 5.**  
(na 4 ćwiczzenia)

**Całka nieoznaczona i oznaczona**

**5.1.** Korzystając z definicji i wzorów na pochodne podstawowych funkcji odgadnąć funkcje pierwotne  $F$  funkcji  $f$ :

(a)  $f(x) = 2x - 1$ , (b)  $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$ , (c)  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ , (d)  $f(x) = e^{-4x}$ .

**5.2.** Obliczyć całki:

(a)  $\int \frac{x^4 - x^3 + x - 1}{x - 1} dx$ , (b)  $\int \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 dx$ , (c)  $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$ ,

(d)  $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$ , (e)  $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$ , (f)  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$ ,

(g)  $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$ , (h)  $\int \sin x \cdot \cos x dx$ , (i)  $\int \left(4 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 6 \cos 3x + 1\right) dx$ .

**5.3.** Obliczyć całki stosując odpowiednie podstawienie

(a)  $\int x\sqrt{1+2x^2} dx$ , (b)  $\int \frac{4x}{\sqrt[3]{x^2-4}} dx$ , (c)  $\int x^2(x^3-2)^5 dx$ , (d)  $\int \sin x \cdot \cos^2 x dx$ ,  
(e)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ , (f)  $\int xe^{-x^2} dx$ , (g)  $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$ , (h)  $\int \frac{1}{4x^2 + 4x + 5} dx$ .

**5.4.** Obliczyć całki, korzystając z tego, że  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ .

(a)  $\int \frac{1}{3x+2} dx$ , (b)  $\int \frac{x}{1+2x^2} dx$ , (c)  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ , (d)  $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$ .

**5.5.** Obliczyć całki, stosując wzór na całkowanie przez części

(a)  $\int xe^{-3x} dx$ , (b)  $\int x \cos \frac{x}{2} dx$ , (c)  $\int x^2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx$ , (d)  $\int \ln(x+2) dx$ ,

(e)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ , (f)  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ , (g)  $\int \operatorname{arcctg} x dx$ , (h)  $\int e^{-x} \sin 2x dx$ .

**5.6.** Zapisać sumę całkową dla podanej całki oznaczonej. Zastosować równomierny podział przedziału całkowania. Wykorzystać wartości funkcji podcałkowej w prawych końcach podprzedziałów. Korzystając z definicji obliczyć całki z przykładów (a), (b).

(a)  $\int_0^1 x^2 dx$ , (b)  $\int_1^2 x dx$ , (c)  $\int_0^\pi \sin x dx$ , (d)  $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ .

**5.7.** Obliczyć całkę oznaczoną. Podać jej interpretację geometryczną, wykonując odpowiedni rysunek.

$$(a) \int_0^1 (1+x) dx, \quad (b) \int_{\frac{\pi}{7}}^{\frac{8\pi}{7}} \sin 2x dx, \quad (c) \int_{-1}^1 e^{-x} dx, \quad (d) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg} x dx, \quad (e) \int_{e^{-2}}^{e^2} \ln x dx.$$

**5.8.** Wyznaczyć średnią wartość funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$ . Wykonać rysunek.

$$(a) f(x) = \sin^2 x, [a, b] = [0, \pi]; \quad (b) f(x) = |x - 2|, [a, b] = [0, 3].$$

**5.9.** Obliczyć pole figury ograniczonej podanymi krzywymi. Wykonać rysunek.

$$(a) y = x^2 - 2x + 3, y = x + 3; \quad (b) y = \frac{4}{x^2 + 2}, y = 1;$$

$$(c) y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 3x; \quad (d) y = -\ln(x + 2), x = 0, y = 0:$$

$$(e) y = 2\sqrt{x}, y = \sqrt{5-x}, y = 0.$$

**5.10.** Napisać wzór na długość łuku wykresu funkcji różniczkowalnej i obliczyć długości podanych krzywych. Naszkicować je.

$$(a) y = -x\sqrt{x}, x \in \left[0, \frac{4}{9}\right]; \quad (b) y = \sqrt{4-x^2}, x \in [-1, 1];$$

$$(c) y = \ln \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]; \quad (d) y = \ln x, x \in [1, e].$$

**5.11.** Napisać wzór na objętość bryły obrotowej powstającej przez obrót wokół osi  $OX$  obszaru ograniczonego wykresem ciągłej funkcji nieujemnej  $y = f(x)$ , osią  $OX$  i prostymi  $x = a, x = b$ . Korzystając z tego wzoru obliczyć objętość:

(a) kuli o promieniu  $R$ ,

(b) stożka ściętego o promieniach podstaw  $r, R$  i wysokości  $H$ ,

(c) bryły powstającej przez obrót wokół osi  $OX$  obszaru

$$T = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \operatorname{tg} x \right\},$$

(d) bryły powstającej przez obrót wokół osi  $OX$  obszaru

$$T = \left\{ (x, y) \in R^2 : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \cos^2 x \right\}.$$

**5.12.** Obliczyć całki funkcji wymiernych

$$(a) \int \frac{8x^2}{x^2 - 1} dx, \quad (b) \int \frac{3x^2}{x^3 + x^2 - 4x - 4} dx, \quad (c) \int \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^4 + 3x^2} dx,$$

$$(d) \int \frac{2}{x^2 + 6x + 18} dx, \quad (e) \int \frac{5 - 4x}{x^2 - 4x + 20} dx, \quad (f) \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x^2 + 2x} dx.$$

**5.13.** Obliczyć całki funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned} \text{(a)} \int \sin^5 x \, dx, & \quad \text{(b)} \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx, & \text{(c)} \int \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x} \, dx, & \quad \text{(d)} \int \frac{1}{4 + 5 \sin^2 x} \, dx, \\ \text{(e)} \int \frac{1}{5 - 3 \cos x} \, dx, & \text{(e)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 3x \, dx, & \text{(f)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 4x \, dx, & \quad \text{(g)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx. \end{aligned}$$

*Podobne zadania (z rozwiązaniami lub odpowiedziami) można znaleźć w skrypcie:  
M.Gewert, Z.Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS,  
Wrocław 2018, rozdział 6, 7, 8.*

## POWTÓRKA

**P.1.** Naszkicować wykresy funkcji.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = \left| \frac{|x|}{2} - 4 \right|, & \text{(b)} f(x) = \frac{x-1}{x-2}, & \text{(c)} f(x) = x^2 - 4|x| + 7, \\ \text{(d)} f(x) = 1 - \sqrt{|x| - 2}, & \text{(e)} f(x) = 2^{-x} - 2, & \text{(f)} f(x) = ||\log_2(x-2)| - 1|, \\ \text{(g)} f(x) = 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}, & \text{(h)} f(x) = \cos \left( |x| + \frac{\pi}{3} \right), & \text{(i)} f(x) = 2 \sin 2x - |\sin 2x|, \\ \text{(j)} f(x) = \frac{|\operatorname{ctg} x|}{\operatorname{ctg} x}, & \text{(k)} f(x) = \pi - \operatorname{arctg} x, & \text{(l)} f(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsin} x. \end{array}$$

**P.2.** Wyznaczyć dziedzinę funkcji.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x}}, & \text{(b)} f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-4}}, & \text{(c)} f(x) = 1 - \ln \sin x, \\ \text{(d)} f(x) = \frac{x-5}{\log_2(x^2-3)}, & \text{(e)} f(x) = \frac{1}{2^{-x}-2}, & \text{(f)} f(x) = \ln^2 \left( 6 - \frac{1}{x} \right), \\ \text{(g)} f(x) = 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{4}, & \text{(h)} f(x) = \frac{e^x}{\pi^2 - 16 \operatorname{arctg}^2 x}, & \text{(i)} f(x) = \operatorname{arcsin} \ln x. \end{array}$$

**P.3.** Rozwiązać równania i nierówności.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} x(x-1) < 2(x+2), & \text{(b)} x^4 - 5x^2 \geq -4, & \text{(c)} \frac{8}{x} \leq 27x^2, \\ \text{(d)} |e^{-x} - 3| = 1, & \text{(e)} 2^x - \frac{3}{2^x} > 2, & \text{(f)} \frac{1}{\ln x} < 3, \\ \text{(g)} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) \geq 0, & \text{(h)} \cos^2 \frac{x}{5} = 1, & \text{(i)} \operatorname{tg} 3x = 2. \end{array}$$

**P.4.** Uzasadnić tożsamość trygonometryczną i podać jej dziedzinę.

$$\text{(a)} \cos x \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\sin x}, \quad \text{(b)} \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \text{(c)} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

**P.5.** Napisać wzory określające funkcje złożone  $f \circ g$ ,  $g \circ f$  oraz naszkicować ich wykresy.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} f(x) = x^2 - 4x, \quad g(x) = |x|, & \text{(b)} f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = 2x + 1, \\ \text{(c)} f(x) = \log_{0,5} x, \quad g(x) = |x| + 2, & \text{(d)} f(x) = \cos 2x, \quad g(x) = 0,5x, \\ \text{(e)} f(x) = \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right), \quad g(x) = 2x, & \text{(f)} f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2. \end{array}$$

**P.6.** Wyprowadzić wzór funkcji odwrotnej do funkcji  $f$ . Naszkicować w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $y = f(x)$  i  $y = f^{-1}(x)$ .

- (a)  $f(x) = 4 - 2x$ , (b)  $f(x) = \sqrt{x} + 1$ , (c)  $f(x) = 1 + 2^x$ , (d)  $f(x) = 2 \ln(x + 1)$ ,  
 (e)  $f(x) = x^2 + 2x$  dla  $x \geq -1$ , (f)  $f(x) = x^2 + 2x$  dla  $x \leq -1$ .

**P.7.** Uzasadnić, że ciąg  $(a_n)$  jest monotoniczny (od pewnego miejsca) i ograniczony

- (a)  $a_n = \frac{n+1}{3n+4}$ , (b)  $a_n = \frac{2^n + 4^n}{5^n}$ , (c)  $a_n = \frac{12^n}{(n+1)!}$ ,  
 (d)  $a_n = \cos^2 \frac{\pi}{4n+7}$ , (e)  $a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$ , (f)  $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2^n}$ .

**P.8.** Obliczyć granice ciągów liczbowych:

- (a)  $a_n = \frac{\sqrt{5n+4}}{4n+\sqrt{5}}$ , (b)  $a_n = \frac{3^{n+1} + 6 \cdot 2^n}{5 \cdot 4^{n-1} - 3^n}$ , (c)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n+3} \cdot 2^n - \sqrt{4n+4}}$ ,  
 (d)  $a_n = 7^{3n+4} - 9^{2n+7}$ , (e)  $a_n = \frac{1+n^2}{1+2+3+\dots+n}$ , (f)  $a_n = \frac{n\sqrt{n+3} - \sqrt{n^3+9}}{\sqrt{n}}$ ,  
 (g)  $a_n = \left(\frac{n^3+2}{n^2+2n}\right)^{3n+1}$ , (h)  $a_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$ , (i)  $a_n = \left(\frac{3n+5}{3n+2}\right)^{2-5n}$ ,  
 (j)  $a_n = \sqrt{\pi^n} - \sqrt{e^n}$ , (k)  $a_n = \frac{\arctg(2n+1)}{1+2\arctgn^2}$ , (l)  $a_n = \ln(4n+5) - \ln(2n+3)$ .

**P.9.** Naszkicować wykresy funkcji spełniających wszystkie podane warunki

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $f$  jest funkcją nieparzystą;  
 (b) prosta  $y = 1$  jest asymptotą poziomą w  $-\infty$ , prosta  $x = 0$  jest asymptotą pionową obustronną,  
 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  nie istnieje,  $g$  jest funkcją parzystą;  
 (c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [h(x) - x + 2] = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$ ,  
 $h$  nie jest ciągła w punkcie  $x_0 = 0$ .

**P.10.** Obliczyć granice funkcji:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}, \quad \text{(b) } \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}, \quad \text{(c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}, \quad \text{(d) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x-5} - 2}{x-9}, \\
 & \text{(e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^x}{4 + 2 \cdot 3^x}, \quad \text{(f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 2^x}{4 + 2 \cdot 3^x}, \quad \text{(g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4^x - 3^x}, \quad \text{(h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x), \\
 & \text{(i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x + \pi}}, \quad \text{(j) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}, \quad \text{(k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x - 5 \sin 5x}{x}, \quad \text{(l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}.
 \end{aligned}$$

**P.11.** Zbadać, czy istnieją granice:

$$\text{(a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{|x|}, \quad \text{(b) } \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{x+2}{x-2}}, \quad \text{(c) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad \text{(d) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{1 - \ln x}.$$

**P.12.** Wyznaczyć asymptoty funkcji:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad \text{(b) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, \quad \text{(c) } f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, \quad \text{(d) } f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}, \\
 & \text{(e) } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}, \quad \text{(f) } f(x) = \frac{\ln x}{2 + \ln x}, \quad \text{(g) } f(x) = \frac{3^x}{3^x - 2}, \quad \text{(h) } f(x) = x + \frac{\sin \sqrt{x}}{x}.
 \end{aligned}$$

**P.13.** Czy można dobrać parametry  $a, b \in \mathbf{R}$  tak, aby funkcja  $f$  była ciągła na  $\mathbf{R}$ ? Obliczyć odpowiednie granice i naszkicować wykres funkcji  $f$ .

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x < 1 \\ b & \text{dla } x = 1 \\ x^2 + ax + 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}, \quad \text{(b) } f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } |x| < 1 \\ \operatorname{arctg} x & \text{dla } |x| \geq 1 \end{cases},$$

**P.14.** Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnić, że równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie na wskazanym przedziale. Przedstawić graficzną interpretację równania.

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } 4^x = \frac{2}{x}, \quad (0,5, 1); \quad \text{(b) } \ln x = 1 - 2x, \quad (0,5, 1); \\
 & \text{(c) } 3^x = -x^3, \quad (-1, -0,5); \quad \text{(d) } 2^x = 4 - \sqrt{x}, \quad (1, 2).
 \end{aligned}$$

**P.15.** Obliczyć pochodne funkcji:

$$\text{(a) } f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1 + x^2)}, \quad \text{(b) } f(x) = e^{3 \sin x} \cdot \sin 2x, \quad \text{(c) } f(x) = (x \cos x)^2, \quad \text{(d) } f(x) = \frac{x \cdot \sqrt[3]{2 + x}}{x + \sqrt[3]{2 + x}}.$$

**P.16.**

(a) Napisać równania stycznych do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(1 - x^2)$  w miejscach zerowych funkcji. Pod jakimi kątami wykres przecina oś  $OX$ ?

(b) Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \ln \sqrt{x} - 0,5x^2$ , która jest równoległa do osi  $OX$ .



(c) Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \ln(x^2 + e^{-x})$ , która jest równoległa do prostej  $l: y = 5 - x$ .

(d) Napisać równanie tej stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \operatorname{tg}(2x) - 3x$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ , która jest prostopadła do prostej  $l: x + 5y = 0$ .

(e) Dla jakich wartości parametrów  $a, b$  parabola o równaniu  $y = -x^2 + ax + b$  jest styczna w punkcie  $(1, 1)$  do prostej  $y = x$ ? Wykonać rysunek.

**P.17.** Wykorzystując różniczkę obliczyć, o ile w przybliżeniu zmieni się wartość funkcji

(a)  $f(x) = (1 + x) \ln x$ , gdy jej argument wzrośnie od wartości  $x_0 = 1$  do wartości  $x_1 = 1,1$ ;

(b)  $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + x}$ , gdy jej argument zmieni się od wartości  $x_0 = 4$  do wartości  $x_1 = 3,99$ .

**P.18.** Zbadać istnienie asymptoty

(a) o równaniu  $x = 0$  funkcji  $f(x) = \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 4x}$ ,

(b) o równaniu  $x = \frac{\pi}{2}$  funkcji  $f(x) = \frac{\ln(1 + 3 \cos x)}{\pi - 2x}$ ,

(c) poziomej w  $+\infty$  funkcji  $f(x) = x \cdot \left(6^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}\right)$ ,

(d) o równaniu  $x = 0$  funkcji  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin 2x}$ .

**P.19.** Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji na wskazanym przedziale.

(a)  $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$ ,  $[-7, 0]$ ;      (b)  $y(x) = \frac{e^x}{1 + x^2}$ ,  $[-2, 2]$ ;

(c)  $g(x) = \sqrt{3} \cos x + \sin x$ ,  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ;      (d)  $y(x) = \sqrt[3]{(x^2 + x)^2}$ ,  $[-2, 3]$ .

**P.20.** Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji  $f$ . Naszkicować jej wykres.

(a)  $f(x) = \ln(x^3 - 2x^2 + x)$ ,    (b)  $f(x) = x \cdot \ln^4 x$ ,    (c)  $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$ ,    (d)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ .

**P.21.** Wyznaczyć zbiór wartości funkcji. Naszkicować jej wykres.

(a)  $y(x) = \frac{(x - 1)^2}{(x - 3)^2}$ ,    (b)  $f(x) = x \cdot (1 + 2 \ln x)$ ,    (c)  $f(x) = x \cdot \sqrt{4x - x^2}$ ,    (d)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ .

**P.22.**

(a) W obszar ograniczony parabolą  $y = 16 - x^2$  i osią  $OX$  wpisano prostokąt tak, że jeden z jego boków leży na osi  $OX$ . Jakie wymiary ma prostokąt o największym polu?

(b) Metodami rachunku różniczkowego uzasadnić, że prostopadłościan o danej sumie długości krawędzi, kwadratowej podstawie i największej objętości jest sześcianem.

(c) Ile materiału stracimy wycinając z blachy w kształcie półkola o promieniu  $R$  prostokąt o największym polu?

**P.23.** Obliczyć całki:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int x \cdot \cos(\pi x + 2) dx, & \text{(b)} \int \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 dx, & \text{(c)} \int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx, \\ \text{(d)} \int \frac{\sin 3x}{e^x} dx, & \text{(e)} \int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x} dx, & \text{(f)} \int \frac{\sqrt[3]{x^2+1} + \sqrt{x^2+1}}{x^2+1} x dx, \\ \text{(g)} \int \frac{1 + \ln x}{1 + \ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} dx, & \text{(h)} \int (1 + \cos x) \cdot \sin^3 x dx, & \text{(i)} \int 3^{2x} \cdot \sin 3^x dx. \end{array}$$

**P.24.** Obliczyć całkę oznaczoną. Podać jej interpretację geometryczną. Wykonać rysunek.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \int_{-1}^1 e^{2x} dx, & \text{(b)} \int_0^\pi \sin x \cos x dx, & \text{(c)} \int_{\frac{1}{e}}^{e^2} \ln x dx, & \text{(d)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x dx. \end{array}$$

**P.25.** Obliczyć pole figury ograniczonej podanymi krzywymi. Wykonać rysunek.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} y = x^2 - 2x, y = x + 4; & \text{(b)} y = x^2, y = 5 - (x + 1)^2; \\ \text{(c)} y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}; & \text{(d)} y = \frac{4}{x^2 + 1}, y = 1; \\ \text{(e)} x + y = 4, y = \frac{3}{x}; & \text{(f)} y = \sin x, y = x, x = \pi; \\ \text{(g)} y = \ln(1 + x), y = x, x = e; & \text{(h)} y = \ln(1 + x), y = x, y = 1. \end{array}$$

*Podobne zadania (także rozwiązane) można znaleźć w skryptach:*

*M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018,*

*M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2018.*

**LISTA 6.**  
(dodatkowa)

**6.1.** Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji

(a)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ , (b)  $f(x) = e^{\arctg x}$ , (c)  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ , (d)  $f(x) = \sin x + 0,125 \sin 2x$ .

**6.2.** Zbadać przebieg zmienności funkcji i sporządzić ich wykresy:

(a)  $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ , (b)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , (c)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ , (d)  $f(x) = 4e^x - e^{2x}$ .

**6.3.** Napisać wzory Taylora z drugą i trzecią resztą dla podanych funkcji i punktów. Naszkicować wykres funkcji oraz wielomianu Taylora pierwszego i drugiego rzędu.

(a)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 1$ ; (b)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = 2$ .

**6.4.** Oszacować dokładność przybliżeń na wskazanych przedziałach:

(a)  $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ ,  $|x| \leq 0,1$ ; (b)  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ,  $|x| \leq 0,01$ ;  
(c)  $\cos^2 x \approx 1 - x^2$ ,  $|x| \leq 0,1$ ; (d)  $e^{-2x} \approx 1 - 2x + 2x^2$ ,  $|x| \leq 0,25$ .

**6.5.** Napisać wzór na pole powierzchni powstałej przez obrót wokół osi  $OX$  wykresu funkcji  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $a \geq 0$ , (nieujemnej i mającej ciągłą pochodną na tym przedziale). Korzystając z tego wzoru obliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót wokół osi  $OX$  wykresu funkcji:

(a)  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $x \in \left[0, \frac{r}{2}\right]$ ; (b)  $y = \frac{x^3}{3}$ ,  $x \in [1, 2]$ ; (c)  $y = 2\sqrt{x+1}$ ,  $x \in [2, 7]$ .

*Jolanta Sulowska*