Analiza matematyczna

Robert Rałowski

14 listopada 2024

Spis treści

Słowo wstępne

Niniejsze opracowanie jest zapisem moich wykladów z rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej, którą można traktować jako uzupełnienie bogatej literatury na ten temat. Główną pozycją, na której oparłem swój wykład jest książka Kazimierza Kuratowskiego **Rachunek całkowy i różniczkowy**.

Omówiłem następujące działy: ciągi liczbowe i szeregi, funkcje ciągłe i różniczkowalne, wypukłość funkcji oraz całki nieoznaczone i oznaczone, wraz zastosowaniami w nauce i technice.

Część I

Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej zmiennej

Rozdział 1

Liczby

1.1 Liczby naturalne

Peano zaksjomatyzował pojęcie zbioru liczb naturalnych zadając następujące postulaty tworzące aksjomatykę Peano.

Definicja 1.1.1 (Aksjomaty Peano) *Istnieje zbiór* $\mathbb{N}$, 0 *oraz funkcja* $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, które spełniają:*

1. $0 \in \mathbb{N}$,
2. $\neg(\exists n \in \mathbb{N}) S(n) = 0$,
3. S *jest różnowartościowa na* $\mathbb{N}$ *tj.* $(\forall m, n \in \mathbb{N})\ m \neq n \longrightarrow S(m) \neq S(n)$,
4. $(\forall z)(0 \in z \wedge (\forall n \in \mathbb{N}) n \in z \longrightarrow S(n) \in z) \longrightarrow \mathbb{N} \subseteq z$.

Ostatni aksjomat jest tak zwana zasadą indukcji matematycznej. Ponadto, S *jest tak zwaną funkcją następnika i wtedy przyjmujemy zasadę, że piszemy* $1 = S(0)$, $n + 1$ *zamiast* $S(n)$*, dalej* $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, *itd.*

W **dodatku** można znaleźć więcej informacji o tematyce poświęconej aksjomatom Peano, mianowicie z niesprzeczności teorii mnogości **ZFC**, wynika istnienie zbioru liczb naturalnych (który spełnia wszystkie aksjomaty Peano).

Tak więc ostatni aksjomat możemy zapisać jako

Definicja 1.1.2 (Zasada indukcji matematycznej) *Jeśli* z *jest zbiorem takim że*

1. $0 \in z$ *oraz*
2. $(\forall n \in \omega) n \in z \longrightarrow n + 1 \in z$,

to wtedy $\mathbb{N} \subset z$.

Fakt 1.1.1 $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \neq 0 \longrightarrow (\exists m \in \mathbb{N})\ m + 1 = n$.

Dowód. Niech $z = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N}) n = m + 1\}$, oczywiście $0 \in z$, załózmy że $n \in z$, to jest $m \in \mathbb{N}$ taka że $n = m+1$, więc $n+1 = (m+1)+1$, stad $n+1 \in z$. Z zasady indukcji matematycznej wynika że $\mathbb{N} \subseteq z$ i dostajemy tezę. ■

Fakt 1.1.2 $(\forall n \in \mathbb{N})\ \neg(n = n+1)$.

Dowód. Niech $z = \{n \in \mathbb{N} :\ \neg(n = n+1)\}$, to z pierwszego aksjomatu $0 \in z$, załóżmy że $n \in z$, wtedy na podstawie aksjomatu 3 mamy $n+1 \neq (n+1)+1$, więc $n+1 \in z$ i na podstawie aksjomatu 4 mamy $\mathbb{N} \subseteq z$. Teza twierdzenia została udowodniona. ■

W zbiorze liczb naturalnych możemy wprowadzić dodawanie i mnożenie. Wprowadzimy dwuargumentowe działanie dodawania na zbiorze $\mathbb{N}$ w sposób następujący:

- $(\forall n \in \mathbb{N})\ n + 0 = n$,
- $(\forall m, n \in \mathbb{N})\ m + (n+1) = (m+n) + 1$.

Podobnie definiujemy mnożenie:

- $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \cdot 0 = 0$,
- $(\forall m, n \in \mathbb{N})\ m \cdot (n+1) = (m \cdot n) + m$.

Jako ćwiczenie, można udowodnić, że obydwa działania są łączne, przemienne oraz zachodzi prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Podamy parę przykładów w których wykorzystana zostanie zasada o indukcji matematycznej.

Przykład 1.1.1 *Dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ ma miejsce następująca równość:*

$$0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Niech będzie dany zbiór:

$$z = \{n \in \mathbb{N} :\ \ 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\}.$$

Oczywiście $0 \in z$. Niech teraz $n \in \mathbb{N}$, pokażemy, że $n+1 \in z$, co na mocy zasady indukcji matematycznej $\mathbb{N} \subset z$. Wiec rozważmy wyrażenie $0+1+2+\ldots+n+n+1$, to wtedy

$$0{+}1{+}2{+}\ldots{+}n{+}n{+}1 = \frac{n(n+1)}{2}{+}n{+}1 = \frac{n(n+1)+2(n+1))}{2} = 0{+}1{+}2{+}\ldots{+}n = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

co świadczy, że również $n+1 \in z$. Tak więc $\mathbb{N} \subset z$, więc mamy tezę.

Przykład 1.1.2 *Pokażemy, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $6|7^n - 1$. Niech*

$$z = \{n \in \mathbb{N} :\ \ 6|7^n - 1\}.$$

Oczywiście $0 \in z$, niech $n \in \mathbb{N}$, to wtedy

$$7^{n+1} - 1 = 7^n \cdot 7 - 1 = 7^n(6+1) - 1 = 7^n \cdot 6 + 7^n - 1.$$

Pierwszy składnik jest podzielny przez 6, natomiast $7^n - 1$ jest podzielne przez 6 (bo $n \in z$) a więc $7^{n+1} - 1$ jest podzielne przez 6. Tak więc $n+1 \in z$, co na mocy zasady indukcji matematycznej dostajemy $\mathbb{N} \subset z$. Więc własność podzielności o jakiej tu mowa została wykazana.

1.2 Liczby rzeczywiste.

Liczby rzeczywiste są podstawowym pojęciem w analizie matematycznej. Liczby rzeczywiste, jakie rozważamy w analizie zdefiniowane zostały w drugiej połowie XIX wieku niezależnie przez G. Cantora i R. Dedekinda.

W zbiorze liczb rzeczywistych są wyróżnione liczby 0 i 1 oraz występują dwa dwuargumentowe działania (dodawanie i mnożenie) oraz relacja porządku liniowego. Nim wprowadzimy aksjomatykę liczb rzeczywistych, wprowadzimy pojęcie porządku liniowego.

Definicja 1.2.1 (Porządek liniowy) *Niech X będzie zbiorem (może być nawet pusty), to para $(X, <)$ stanowi porządek liniowy, jeśli spenione są następujące warunki:*

antyzwrotność $\forall x \in X \ \neg(x < x)$,

słaba antysymetria $\forall x, y \in X \ \neg(x < y \wedge y < x)$,

przechodniość $\forall x, y, z \in X \ (x < y \wedge y < z) \longrightarrow (x < z)$,

liniowość $\forall x, y \in X \ x < y \vee y = x \vee x < z$.

Pierwsze trzy warunki stanowią porządek częściowy w $(X, <)$.

Ponadto, mając porządek częściowy lub liniowy $(X, <)$, możemy wprowadzić relację słabej nierówności. Mianowicie, dla

$$(\forall x, y \in X) \ (x \leq y \longleftrightarrow x < y \vee x = y).$$

Bezpośrednio z definicji relacji słabej równości mamy następujący fakt.

Fakt 1.2.1 *Jeżeli $(X, <)$ jest porządkiem liniowym, to w $(X, \leq)$ zachodzą:*

1. $\forall x, y \in X \ x \leq x$,
2. $\forall x, y \in X \ (x \leq y \wedge y \leq x) \longrightarrow x = y$, *jest to słaba antysymetria w $(X, \leq)$,*
3. $\forall x, y, z \in X \ (x \leq y \wedge y \leq z) \longrightarrow (x \leq z)$, *- przechodniość,*
4. $\forall x, y \in X \ x \leq y \vee x \leq z$, *- liniowość w $(X, \leq)$.*

Jeżeli $(X, \leq)$ spełnia trzy pierwsze powyżej warunki, to $(X, \leq)$ jest jedynie porządkiem częściowym. Wówczas możemy zdefiniować relację ostrej nierówności $<$. Mianowicie,

$$\forall x, y \in X \ x < y \longleftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y.$$

Zauważmy, że mamy analogiczny fakt. Jeśli $(X, \leq)$ jest porządkiem liniowym (częściowym), to $(X, <)$ również nim jest w świetle definicji 1.2.1.

Definicja 1.2.2 *Niech $(X, \leq)$ będzie porządkiem częściowym, $A \subseteq X$ niepustym podzbiorem oraz $x_0 \in A$, to wtedy definiujemy*

- x_0 - *element najmniejszy w A jeśli* $\forall a \in A\ x_0 \leq a$,
- x_0 - *element największy w A jeśli* $\forall a \in A\ a \leq a_0$,
- x_0 - *element minimalny w A jeśli* $\neg(\exists a \in A)\ (a < x_0)$,
- x_0 - *element maksymalny w A jeśli* $\neg(\exists a \in A)\ (x_0 < a)$.

Wprost z definicji przekonujemy się, że istnieje co najwyżej jeden element minimalny (maksymalny) w podzbiorze A. Ponadto, każdy element największy (najmniejszy) w A jest elementem maksymalnym (minimalnym) w A. Elementów maksymalnych (minimalnych) w A może być wiele.

Przykład 1.2.1 *Niech X będzie zbiorem 3 elementowym np. $X = \{0, 1, 2\}$. Niech*

$$P(X) = \{Y : Y \subseteq X\} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, X\}$$

będzie zbiorem potęgowym zbioru X. To $(X, \subseteq)$ jest porządkiem częściowym ale nie jest porządkiem liniowym. Zauważmy, że $\emptyset$ jest elementem najmniejszym w zbiorze $P(X)$ a X jest największym w $P(X)$. Jeżeli założymy, że $A \subseteq P(X)$ jest rodziną wszystkich niepustych podzbiorów X-a, to w A nie ma elementu najmniejszego, największy jest równy X. Co więcej, zbiór

$$\{\{x\} : x \in X\} = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\} \subseteq A,$$

jest zbiorem wszystkich elementów minimalnych w A.

W powyższym przykładzie widzimy, że może być wiele elementów minimalnych w $A \subseteq X$. Warto odnotować, że w przypadku porządków liniowych jest co najwyżej jeden element minimalny w A. Ponadto, jest on jednocześnie elementem najmniejszym w A.

Definicja 1.2.3 (podział w porządku liniowym) *Niech $(X, <)$ będzie porządkiem liniowym i $A, B \in P(X)$ będą podzbiorami X. Wtedy, powiemy, że para (A, B) stanowi podział X-a jeśli*

1. $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$,
2. $A \cup B = X \wedge A \cap B = \emptyset$,
3. $\forall a \in A\, \forall b \in B\ a < b$.

Definicja 1.2.4 (Liczby rzeczywiste) *Za zbiór liczb rzeczywistych $(\mathbb{R}, \cdot, +, 0, 1, <)$ możemy uznać każdy zbiór spełniający następujące aksjomaty:*

1. *Zbiór liczby wymiernych jest podzbiorem wszystkich liczb rzeczywistych* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$,
2. $(\mathbb{R}, \cdot, +, 0, 1)$ *jest ciałem (abelowym), tzn.*
   (a) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ (x + y) + z = x + (y + z) \wedge (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}\ x + y = y + x \wedge x \cdot y = y \cdot x$,

(c) $\forall x \in \mathbb{R} x + 0 = x = 0 + x \wedge x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$,

(d) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}\ x + y = 0 = y + x$,

(e) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R}\ x \cdot y = 1 = y \cdot x$,

(f) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

3. $(\mathbb{R}, <)$ *jest porządkiem liniowym takim że:*

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ \ x < y \ \textit{to}\ x + z < y + z,$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \ x > 0, y > 0 \ \textit{to}\ xy > 0,$$
$$x > 0 \ \textit{to}\ \neg(-x > 0),$$

4. **(Aksjomat Dedekinda)** *jeśli $A, B \subset \mathbb{R}$ niepusty podział $\mathbb{R}$, to istnieje liczba rzeczywista $c \in \mathbb{R}$, taka że $c \in A$ i c jest największym elementem zbioru A lub $c \in B$ i c jest najmniejszym elementem zbioru B.*

Definicja 1.2.5 (Ograniczenie górne) *Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest ograniczony z góry wtedy i tylko wtedy gdy*
$$(\exists c \in X)(\forall a \in A)\ \ a \leq c.$$

Definicja 1.2.6 (Kres górny) *Mówimy, że zbiór ograniczony z góry $A \subset X$ ma kres górny $c \in X$ wtedy i tylko wtedy gdy c jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A ($A \subset X$ jest ograniczony z góry wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $c \in X$ takie że $a \in A$ to $a \leq c$).*

Twierdzenie 1.2.1 (O kresie górnym) *Każdy niepusty podzbiór ograniczony z góry $D \subset \mathbb{R}$ ma kres górny.*

Dowód. Niech $D \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem ograniczonym z góry. Rozpatrzmy następujący podział $A, B \subset \mathbb{R}$ zbioru liczb rzeczywistych:

$$x \in A \equiv (\exists a \in D)\ \ x \leq a, \text{ oraz } \quad B = \mathbb{R} \setminus A.$$

Oczywiście A, B są niepuste z założenia. Jeśli by istniały elementy $x \in A$ i $y \in B$ takie że $y < x$ to istniałby $a \in A$ taki że $x \leq a$ i z przechodniości relacji mniejszości mamy $y < a$ więc $y \in A$ co jest niemożliwe ($y \in \mathbb{R} \setminus A$). więc

$$x \in A, y \in B \text{ to } x < y.$$

Więc rzeczywiście A, B jest niepustym podziałem $\mathbb{R}$. Z aksjomatu Dedekinda wynika istnienie elementu $c \in \mathbb{R}$ takiego że $c \in A$ jest największym elementem zbioru A lub $c \in B$ najmniejszym zbioru B. Oczywiście c jest ograniczeniem górnym zbioru $D \subset A$ (c jest największym w A o ile $c \in A$, $c \in B$ to $a \in A$ to $a < c$ bo A, B jest podziałem $\mathbb{R}$). Teraz udowodnimy, że c jest najmniejszym ograniczeniem zbioru D. Przypuścmy że istnieje mniejsze ograniczenie górne zbioru D np $c' < c$, to oczywiscie $c' < c" := \frac{c'+c}{2} < c$ i $c"$ jest ograniczeniem zbioru A a więc D. Oczywiście $c" \in B$ więc tym bardziej $c \in B$ wiec c jest najmnieszym elementem w B z aksjomatu Dedekinda co jest sprzeczne z faktem że $c" < c$ ($c" \in B$) co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Uwaga 1.2.1 *Analogicznie definiuje się pojęcie ograniczenia dolnego zbioru oraz kresu dolnego zbioru i oczywiscie zachodzi* **Twierdzenie o kresie dolnym**.

Twierdzenie 1.2.2 *Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest nieograniczony w $\mathbb{R}$.*

Dowód. Przypuścmy, że teza jest nieprawdziwa, tzn. $\mathbb{N}$ jest ograniczony. Więc na mocy poprzedniego twierdzenia o kresach zbiór $\mathbb{N}$ ma kres górny $g \in \mathbb{R}$. Więc

1. $n \in \mathbb{N}$ to $n \leq g$.
2. $g' < g$ to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że $g' < n_0$.

Jeśli $g' = g - 1$ to z 2) mamy

$$g - 1 < n_0 \longrightarrow g < n_0 + 1 \leq g \longrightarrow g < g,$$

gdzie skorzystaliśmy z definicji liczb naturalnych ($n \in \mathbb{N}$ to $n+1 \in \mathbb{N}$), a stąd otrzymujemy sprzeczność. ■

Twierdzenie 1.2.3 *Jeśli $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, to istnieje $c \in \mathbb{Q}$ takie że $a < c < b$.*

Dowód. Możemy oczywiście założyć że $0 < a < b$, to korzystając z faktu że liczby naturalne $\mathbb{N}$ są zbiorem nieograniczonym w $\mathbb{R}$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że

$$\frac{1}{b-a} < n_0.$$

Niech

$$m_0 = \max\left\{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \frac{m}{n_0} \leq a\right\},$$

wtedy mamy następujące nierówności:

$$a < \frac{m_0+1}{n_0} = \frac{m_0}{n_0} + \frac{1}{n_0} < a + (b-a) = b$$

co kończy dowód biorąc za $c = \frac{m_0+1}{n_0}$. ■

Twierdzenie 1.2.4 (Liczba $\sqrt{2}$) *Istnieje dodatnia liczba rzeczywista $a \in \mathbb{R}$, taka że $a^2 = 2$.*

Dowód. Niech $A = \{x \in \mathbb{R} :\ 0 < x \wedge x^2 < 2\}$, to $1 \in A$ oraz jeżeli $x \in A$, to $x^2 < 2 < 4$. Gdyby $2 < x$ i $x \in A$, to $4 = 2^2 < x^2 < 2$ co dałoby $4 < 2$, sprzeczność. Więc zbiór A jest nepusty i ograniczony z góry. Na mocy twierdzenia 1.2.1 istnieje liczba rzeczywista $a \in \mathbb{R}$, która jest kresem górnym zbioru A.

Pokażemy że $\neg(a^2 < 2)$ oraz $\neg(2 < a^2)$, co daje nam tezę twierdzenia, mianowicie że zachodzi $a^2 = 2$.

Załóżmy że mamy $a^2 < 2$, pokażemy że istnieje $x \in A$, taka że $a < x$ co jest niemożliwe na mocy faktu że a jest kresem górnym zbioru A. Tutaj x będzie postaci $a + \frac{1}{n}$ dla pewnej dodatniej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy że $1 \leq a$ i $(a + \frac{1}{n})^2 < 2 \longleftrightarrow a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2$ i wystarczy znaleźć nasze $n > 0$, takie aby $a^2 + \frac{3a}{n} < 2$. Ponieważ mamy

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{an}{n^2} = a^2 + \frac{3a}{n} < 2.$$

Niech $y = \frac{3a}{2-a^2}$, to $0 < y$ i na mocy twierdzenia 1.2.2 istnieje dodatnia liczba naturalna $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ taka że $y = \frac{3a}{2-a^2} < n$. Ponieważ $2 - a^2 > 0$, to mamy

$$\frac{3a}{2 - a^2} < n \longleftrightarrow 2 > a^2 + \frac{3a}{n} \geq a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} = (a + \frac{1}{n})^2 = x^2 > a^2$$

i wtedy $x = (a + \frac{1}{n}) \in A$ jest większe od a, co jest niemożliwe bo a jest kresem górnym zbioru A.

Teraz załóżmy że $2 < a^2$. Znajdziemy takie dodatnie $y \in \mathbb{R}$ że $y < a$ i takie że dla każdego $x \in A$ $x < y$, co oznaczałoby że a nie jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A a więc a i w tym przypadku też mie byłoby kresem górnym zbioru A. Tutaj znajdziemy dodatnią liczbą naturalną $n \in \mathbb{N}$, że nasze y będzie postaci $a - \frac{1}{n}$. Nierówność $2 < y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $2 < a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$. Zauważmy że $a^2 - \frac{2a}{n} < a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$, więc wystarczy znaleźć taką dodatnią liczbę $n \in \mathbb{N}$ że $2 < a^2 - \frac{2a}{n}$. Niech $t = \frac{2a}{a^2-2}$, to istnieje dodatnia liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$ taka że $\frac{2a}{a^2-2} < n$, co wobec założenia że $a^2 - 2 > 0$ daje

$$2 < a^2 - \frac{2a}{n} < a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} = (a - \frac{1}{n})^2 = y^2 < a^2.$$

Niech $x \in A$ będzie dowolne, gdyby $y \leq x$, to wtedy $y^2 \leq x^2 < 2$, więc $y^2 < 2$, co jest niemożliwe. Stąd dla każdego $x \in A$ mamy $x < y$ ale też mamy $y < a$, więc a nie byłoby najmniejszym ograniczenie górnym zbioru A i w konsekwencji, a nie byłoby kresem górnym zbioru A wbrew założeniu o liczbie a. ■

Twierdzenie 1.2.5 *Jeśli $a, b \in \mathbb{Q}$ i $a < b$, to istnieje $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, takie że $a < c < b$.*

Dowód. Tak jak w poprzednim dowodzie, możemy założyć że $0 \leq a < b$. Oczywiście łatwo sprawdzić, że $d := \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Korzystając z nieograniczoności $\mathbb{N}$ w $\mathbb{R}$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, że

$$\frac{\sqrt{2}}{b - a} < n_0,$$

podobnie jak w poprzednim dowodzie niech

$$m_0 = \max\left\{m \in \mathbb{N} : \frac{m\sqrt{2}}{n_0} \leq a\right\},$$

wtedy mamy

$$a < \frac{(m_0+1)\sqrt{2}}{n_0} = \frac{m_0\sqrt{2}}{n_0} + \frac{\sqrt{2}}{n_0} < a + (b-a) = b$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Otrzymujemy z powyższych twierdzeń wniosek.

Wniosek 1.2.1 *Wniosek Jeścli $a, b \in \mathbb{R}$ są liczbami rzeczywistymi $a < b$, to isnieją $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oraz liczba wymierna $d \in \mathbb{Q}$ że*

$$a < c < b \text{ oraz } a < d < c.$$

1.2.1 Nierówności

Nierówności w analizie matematycznej odgrywają kluczową rolę, choćby przy zagadnieniach związanych z istnieniem granic ciągów czy też funkcji, badaniem monotoniczności ciągów i wiele wiele innych problemów.

Zdefiniujmy wartość bewzględną z liczby rzeczywistej w sposób następujący:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Wtedy mamy następujące nierówności:

1. $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \leq |x|$,
2. $(\forall x \in \mathbb{R})\ 0 \leq |x|$,
3. $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ |x+y| \leq |x| + |y|$,
4. $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ ||x| - |y|| \leq |x-y|$,
5. $(\forall x, y, r \in \mathbb{R})\ |x-y| < r \longleftrightarrow x - r < y < x + r$.

Ponadto, mamy $|x| = \big||x|\big| = |-x|$ oraz $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in \mathbb{R}$.

Przykład 1.2.2 (Nierówność Bernouliego)

$$(\forall x \geq -1)(\forall n \in \mathbb{N})\ (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Udowodnimy tę nierówność stosując indukcję matematyczną. Dla $n = 0$ *nierówność jest oczywista:* $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \cdot x$. *Ustalmy teraz dowolną liczbę naturalną* $n \in \mathbb{N}$ *i załóżmy, że nierówność* $(a+x)^n \geq 1 + n \cdot x$ *jest prawdziwa. Wtedy dla* $n+1 \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+x^2 \geq 1+nx+x = 1+(n+1)\cdot x$$

a stąd nierówność Bernouliego dla $n+1$ *też jest prawdziwa. Z zasady indukcji matematycznaj mamy więc że dla dowolnej liczby naturalnej* $n \in \mathbb{N}$ *i* $x \geq -1$ *mamy* $(1+x)^n \geq 1+n\cdot x$, *co należało dowieść.*

Przykład 1.2.3 *Stosując indukcję matematyczną, udowodnimy prawdziwość następującego zdania*

$$(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(\forall x_1, \ldots x_n \in (0,\infty)) \;\; x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \longrightarrow n \leq x_1 + \ldots + x_n.$$

Dla $n = 1$ *nierówność jest prawdziwa* $x_1 = 1 \longrightarrow x_1 \geq 1$. *Załóżmy że dla liczby naturalnej* $n \in \mathbb{N}$ *prawdziwe jest zdanie*

$$(\forall x_1, \ldots x_n \in (0,\infty)) \;\; x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \longrightarrow n \leq x_1 + \ldots + x_n$$

Dla $n+1$ *rozważmy ciąg dodatnich liczb rzeczywistych* $x_1, \ldots, x_{n+1}$ *takich że* $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} = 1$. *Bez straty ogólności możemy założyć, że* x_n *jest najmniejszą liczbą w tym ciągu a* x_{n+1} *jest największą. Wtedy* $1 - x_n \geq 0$ *i* $x_{n+1} - 1 \geq 0$ *a stąd mamy*

$$0 \leq (1-x_n)(x_{n+1}-1) = x_n + x_{n+1} - 1 - x_n x_{n+1} \longrightarrow x_n x_{n+1} \leq x_1 + x_{n+1} - 1.$$

Kładąc $y_1 = x_1, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1}$ *oraz* $y_n = x_n x_{n+1}$, *widzimy że*

$$y_1 \ldots y_n = x_1 \ldots x_{n-1}(x_n x_{n+1}) = 1.$$

Stosując załozenie inducyjnę mamy $n \leq y_1 + \ldots + y_n = x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1}$. *Stosując powyższą nierówność mamy*

$$n \leq y_1 + \ldots + y_n = x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \leq x_+ \ldots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} - 1,$$

więc w koncu dla dowolnych dodatnich liczb $x_1, \ldots, x_{n+1}$, *takich że* $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} = 1$ *mamy żadaną nierówność*

$$n + 1 \leq x_1 + \ldots + x_{n+1}.$$

Z zasady o indukcji matematycznej udowodniliśmy żądaną nierówność dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 1.2.4 (Nierówność Cauchy'ego) *Dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej* $n \in \mathbb{N}$, *dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych* $a_1, \ldots, a_n$ *zachodzi nierówność*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Niech $A = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$ *i dla* $k \in \{1, \ldots, n\}$ $x_k = \frac{a_k}{A}$*. Oczywiście każda liczba* x_k *jest dodatnia oraz*

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{a_1}{A} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{A} = \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{A^n} = \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = 1.$$

Na mocy nierówności udowodnionej w poprzednim przykładzie, mamy

$$n \leq x_1 + \ldots + x_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{A}$$

a więc

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = A \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

co należało dowieść.

Jeżeli w ostatnim przykładzie dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, \ldots x_n$ podstawimy za $a_1 = \frac{1}{x_1}, \ldots, a_n = \frac{1}{x_n}$, to otrzymamy

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_1}}{n},$$

a stąd mamy

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_1}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Reasumując, dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n, dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ mamy

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_1}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Tutaj, pierwsze wyrażenie jest średnią harmoniczną, drugie średnią geometryczną a ostatnie stanowi średnią arytmetyczną liczb $a_1, \ldots, a_n$.

Zadania: liczby naturalne i rzeczywiste

Stosując aksjomatykę Peano (omówioną na wykładzie), definiujemy dodawanie i mnożenie w sposób rekurencyjny:

D1: $(\forall n \in \mathbb{N})\ n + 0 = n$,

D2: $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n + S(m) = S(n + m)$.

M1: $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \cdot 0 = 0$,

M2: $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \cdot S(m) = (n \cdot m) + n$.

Zadanie 1 *Proszę udowodnić następujące własności liczb naturalnych:*

1. $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})(\exists m \in \mathbb{N})\ \ n = S(m)$,
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n \neq S(n)$.

Zadanie 2 *Proszę udowodnić następujace własności dodawania i mnożenia liczb naturalnych:*

1. $(\forall m, n, k \in \mathbb{N})\ \ (m + n) + k = m + (n + k)$.
   Wsk. Rozważyć zbiór $Z = \{k \in \mathbb{N} :\ \ (\forall m, n \in \mathbb{N})\ (m + n) + k = m + (n + k)\}$.
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ S(0) \cdot n = n$,
3. $(\forall m, n, k \in \mathbb{N})\ \ (m + n) \cdot k = (m \cdot k) + (n \cdot k)$,
4. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 0 \cdot n = 0$,
5. $(\forall m, n \in \mathbb{N})\ \ m \cdot n = n \cdot m$,
6. $(\forall m, n, k \in \mathbb{N})\ \ (m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$.

Zadanie 3 *Stosując zasadę skończonej indukcji matematycznej, proszę udowodnić, że dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi:*

- $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + \ldots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,
- $10^n - 4^n$ *jest podzielna przez* 6,
- $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2n}{n+1}$
- $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \ x^n + y^n \leq (x + y)^n$.

Zadanie 4 **(Zasada Archimedesa)** *Proszę wykazać, że*

$$(\forall x > 0)(\forall y > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ \ x < n \cdot y,$$

tutaj $x, y \in \mathbb{N}$.

Zadanie 5* *Proszę udowodnić, ze pomiędzy dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi można znaleźć liczbę wymierną oraz liczbę niewymierną.*

Zadanie 6 *Proszę pokazać, że liczby* $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ *sa niewymierne.*

Zadanie 7 *Proszę wyznaczyć* **kres górny** *oraz* **kres dolny** *dla następujących zbiorów:*

1. $A = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} :\ m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$,

2. $B = \left\{ \frac{2}{m} + \frac{3}{n} : \ m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$,

3. $C = \left\{ \frac{n}{n+2} : \ \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Które z powyzszych kresów są osiągane ?

Zadanie 8 *Proszę wykazać następujace nierównosci:*

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ \ |x + y| \leq |x| + |y|$,

2. $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ \ \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

1.3 Ciągi liczbowe

Definicja 1.3.1 (Ciąg liczbowy) *Ciągiem liczbowym nazywamy każdą funkcję* $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$.

Uwaga 1.3.1 *Ciąg liczbowy* $a : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ *oznaczamy również jako*

$$a = \big(a(1), a(2), \dots\big) \quad \text{lub } (a_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{oraz jako } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Jednym z najważniejszych pojęć w teorii ciągów liczbowych jest pojęcie granicy ciagu

Definicja 1.3.2 *Niech będzie dany ciąg liczbowy* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, to liczbę rzeczywistą* $g \in \mathbb{R}$ *nazyway granicą ciągu liczbowego jeśli*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} n > n_0 \text{ to } |a_n - g| < \epsilon$$

Uwaga 1.3.2 *Granicę ciągu liczbowego oznaczamy przez*

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Przykład 1.3.1 ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$***)*** *Niech będzie dana dodatnia liczba* $\epsilon > 0$*. Korzystając z faktu że* $\mathbb{N}$ *jest nieoganiczony z góry w zbiorze* $\mathbb{R}$*, istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *taka że* $\frac{1}{\epsilon} < n_0$*. Niech* $n \in \mathbb{N}$ *będzie dowolną liczbą naturalną* $n \in \mathbb{N}$ *większą od* n_0*. Wtedy mamy*

$$0 < \frac{1}{\epsilon} < n \longrightarrow 0 < \frac{1}{n} < \epsilon \longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon.$$

Ostatecznie mamy że dla dowolnego $\epsilon > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, takie że dla dowolnego* $n > n_0$ *zachodzi*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon,$$

co należało dowieść.

Przykład 1.3.2 ($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$***)*** *Niech* $\epsilon > 0$ *będzie dowolną liczbą dodatnią rzeczywistą. Więdząc że zbiór* $\mathbb{N}$ *jest nieograniczony w* $\mathbb{R}$ *wynika, że istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *dla którego zachodzi*

$$\frac{2}{\epsilon^2} + 1 < n_0,$$

tak więc jeśli $n > n_0$ *to wtedy*

$$\frac{2}{\epsilon^2} + 1 < n \longrightarrow 1 < \frac{n-1}{2}\epsilon^2 \longrightarrow n < \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 = \binom{n}{2}\epsilon^2 < \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\epsilon^2 = (1+\epsilon)^n$$

stąd mamy

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \epsilon \text{ dla } n > n_0 = n_0(\epsilon)$$

a więc ostatecznie dla każdego $\epsilon > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *że jeśli* $n > n_0$ *to*

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon,$$

co jest równoważne że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Zachodzi następujące

Twierdzenie 1.3.1 *Jeśli ciąg ma granicę, to ma jedyną*

Dowód. *Niech ciąg będzie zbieżny do dwóch liczb $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$, załóżmy więc, że $|g_1 - g_2| = \epsilon$. Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $n > n_0$ to $|a_n - g_i| < \frac{\epsilon}{2}$, a więc*

$$\epsilon = |g_1 - g_2| \leq |a_n - g_1| + |a_n - g_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

co daje sprzeczność. ■

Twierdzenie 1.3.2 (Warunek Cauchy'ego) *Ciąg a_n jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m > n_0)\ |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Dowód. *Dowód w jedną stronę jest prawie oczywisty, bo mamy*

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - g| + |a_m - g| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

dla pewnej liczby $n_0 \in \mathbb{N}$ i każdego $n > n_0$.

Natomiast w drugą stronę, z naszego warunku (kładąc $\epsilon = 1$) dostajemy ograniczoność naszego ciągu. Więc zbiór

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} :\ |\{n \in \mathbb{N} :\ a_n > x\}| = \aleph_0 \right\}$$

jest niepusty i ograniczony z góry, więc ma kres górny $g = \sup A \in \mathbb{R}$. Udowodnimy, że $g = \lim_{n\to\infty} a_n$. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą, to wtedy na mocy kraesu górnego zbioru A, zbiór

$$A_\epsilon = \left\{ n \in \mathbb{N} :\ g + \epsilon \leq a_n \right\}$$

jest skończony, więc istnieje $n_0 \geq \max A_\epsilon$, że dla $n > n_0$ $a_n < g + \epsilon$. Pokażemy teraz, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ $n > n_0$ to $g - \epsilon < a_n$. Gdyby tak nie było, to

$$\left\{ n \in \mathbb{N} :\ a_n \leq g - \epsilon \right\}$$

byłby nieskończony, ale $g - \frac{\epsilon}{2} < g$, to istnieje również nieskończenie wiele wyrazów ciągu a_n, że $g - \frac{\epsilon}{2} < a_n$. Jeśli $n_0 \in \mathbb{N}$ jest dowolne, to istnieje takie $m, n > n_0$ że $a_m < g - \epsilon$ oraz $g - \frac{\epsilon}{2} < a_n$, to wtedy

$$a_n - a_m \geq g - \frac{\epsilon}{2} - (g - \epsilon) = \frac{\epsilon}{2}$$

a stąd otrzymujemy sprzeczność z naszym warunkiem Cauchy'ego ■

Definicja 1.3.3 (Ciąg ograniczony) *Niech będzie dany ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to powiemy że jest on*

ograniczony z góry: *gdy* $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq M$,

ograniczony z dołu: *gdy* $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ m \leq a_n$,

ograniczony: *gdy jednocześnie jest ograniczony z góry i jest ograniczony z dołu.*

Oczywiście mamy następujący fakt

Fakt 1.3.1 *Ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq M.$$

Przykład 1.3.3 *Rozważmy dwa ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,*

- *jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \frac{1}{n+1}$, to wtedy $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$, więc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony,*
- *jeżeli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $b_n = n^2$, to wtedy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $0 \leq b_n$ i dla dowolnej liczby rzeczywistej $M \in \mathbb{R}$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że $M < n_0$ ale mamy również $n \leq n^2$ dla każdej liczby naturalnej n. Więc ostatecznie dla każdej $M \in \mathbb{R}$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że $M < n_0^2 = b_{n_0}$. Reasumując, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ograniczonym z dołu ale nie jest ciągiem ograniczonym z góry.*

Twierdzenie 1.3.3 (Weierstrassa) *Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.*

Dowód. *Załóżmy, że ciąd $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest oganiczony, weźmy pod uwagę następujący zbiór:*

$$P \equiv \left\{ x \in \mathbb{R} :\ |\{n \in \mathbb{N} :\ a_n < x\}| < \aleph_0 \right\}$$

Zauważmy, że nasz zbiór jest niepusty i nie jest całą prostą $\mathbb{R}$, co wynika z tego, że istnieje takie $m, M \in \mathbb{R}$, że $m < a_n < M$ dla dowowlnego $n \in \mathbb{N}$ (ciąg ograniczony). Niech $x \in P$ i $y < x$, to wtedy prawdziwa jest inkluzja

$$\{n \in \mathbb{N} :\ a_n < y\} \subset \{n \in \mathbb{N} :\ a_n < x\}$$

ale ten większy zbiór jest skończony, więc $\{n \in \mathbb{N} :\ a_n < y\}$ jest skończony a stąd $y \in P$, więc P jest przedziałem ograniczonym z góry. Stąd istnieje kres górny $g \in \mathbb{R}$ zbioru P. Niech $k \in \mathbb{N}$ to $\{n \in \mathbb{N} : a_n < g - \frac{1}{k}\}$ jest skończony oraz $\{n \in \mathbb{N} : a_n < g + \frac{1}{k}\}$ jest nieskończony, więc

$$\left|\left\{ n \in \mathbb{N} :\ \ g - \frac{1}{k} < a_n < g + \frac{1}{k} \right\}\right| = \aleph_0.$$

Więc istnieje $m_k > k$, że $a_{m_k} \in (g - \frac{1}{k}, g + \frac{1}{k})$, ale $k \in \mathbb{N}$ jest dowolne, co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Zachodzi w pewnym sensie twierdzenie odwrotne do poprzedniego.

Twierdzenie 1.3.4 *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Dowód. *Jeśli ciąg* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest zbieżny, to biorąc* $\epsilon = 1 > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, że jeśli* $n > n_0$*, to* $g-1 < a_n < g+1$*. Biorąc* $m, M \in \mathbb{R}$ *takie, że* $m+1 = \min\{\min\{a_n \in \mathbb{R} : n \leq n_0\}, g-1\}$ *oraz* $M - 1 = \max\{\max\{a_n \in \mathbb{R} : n \leq n_0\}, g+1\}$ *mamy* $m < a_n < M$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$. ■

Twierdzenie 1.3.5 (o trzech ciągach) *Niech dane będą trzy ciągi liczbowe* a_n, b_n, c_n *mające następujące własności:*

1. *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ $n > n_0$*, to* $a_n \leq c_n \leq n_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

to ciąg c_n *jest też zbieżny oraz*

$$\lim_{n\to\infty} = g.$$

Dowód. *Niech* $\epsilon > 0$ *będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą, to istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takie że* $n > n_0$ *to*

$$g - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < g + \epsilon$$

co daje $|c_n - g| < \epsilon$*, dowód jest więc zakończony.* ■

Twierdzenie 1.3.6 (o ciągu monotonicznym i ograniczonym) *Niech ciąg* a_n *jest rosnący (malejący) i ograniczony z góry (z dołu) odpowiednio, to jest zbieżny.*

Dowód. *Ciąg* a_n *jest ograniczony, więc zbiór*

$$\Big\{a_n \in \mathbb{R} : \quad n \in \mathbb{N}\Big\}$$

jest również ograniczony w $\mathbb{R}$*, więc ma swój kres górny* $g \in \mathbb{R}$*. Więc dla każdego* $\epsilon > 0$ *mamy*

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}\Big) \quad a_n \leq g < g + \epsilon$$

oraz istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ *takie że,* $g - \epsilon < a_{n_0}$ *i jeśli* $n > n_0$ *to z faktu, że jest rosnący mamy*

$$g - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq g < g + \epsilon$$

co kończy dowód naszego twierdzenia w przypadku gdy a_n *jest rosnący i ograniczony, dla drugiego przypadku dowód jest analogiczny.* ■

Przykład 1.3.4 *Zbadamy zbieżność szeregu*

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pokażemy, że ciąg e_n jest rosnący:

$$\begin{aligned}
e_n =& \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!n^k} \\
=& 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} \leq 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1(1-\frac{1}{n+1})\dots(1-\frac{k-1}{n+1})}{k!} \\
&+ \frac{1(1-\frac{1}{n+1})\dots(1-\frac{n+1-1}{n+1})}{(n+1)!} = e_{n+1}
\end{aligned}$$

Ograniczoność z góry wynika następująco:

$$\begin{aligned}
e_n =& 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!} \\
\leq& 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2+1 = 3.
\end{aligned}$$

Korzystając z poprzedniego twierdzenia wnosimy, ze granica ciągu e_n istnieje:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Przykład 1.3.5 *Niech $a_n = \sqrt[n]{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście nasz ciąg jest ograniczony z dołu $1 \leq a_n$. Pokażemy, że jest malejący od pewnego miejsca. Ciąg jest malejący, gdy $n > n_0 \in \mathbb{N}$ to $a_{n+1} \leq a_n$ a więc*

$$\begin{aligned}
\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n} \longleftrightarrow & (\sqrt[n+1]{n+1})^{n(n+1)} \leq (\sqrt[n]{n})^{n(n+1)} \longleftrightarrow (n+1)^n \leq n^{n+1} \\
\longleftrightarrow & \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq n \longleftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n,
\end{aligned}$$

więc jeśli $n > 3$ to

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 < n$$

a stąd mamy

$$a_{n+1} = \sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n} = a_n, \quad \text{dla } n > 3.$$

Na podwtawie twierdzenia o zbieżności ciągu ograniczonego i monotonicznego, wnioskujemy, że nasz ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny.

Twierdzenie 1.3.7 (O arytmetyce granic) *Niech ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ będą ciągami zbieżnymi, wówczas mamy:*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$

3. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$

4. *Jeśli* $b_n \neq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *to* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

5. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{(\lim_{n\to\infty} b_n)}$.

Dowód. *Wykażemy dla przykładu prawdziwość (3) i (5). Wiemy, że ciąg* a_n *jest zbieżny, więc jest ograniczony: istnieje* $M > 0$ $n \in \mathbb{N}$ *to* $|a_n| < M$ *i* $b_n < M$. *Wybierzmy dowolne* $\epsilon > 0$, *więc istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że jeśli* $n > n_0$ *to*

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M} \text{ oraz } |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Stąd mamy

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| < M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2m}M = \epsilon,$$

co kończy dowód punktu (3).

Dowód (5). Wpierw pokażemy, że $\lim_{n\to\infty} c^{b_n} = c^{\lim_{n\to\infty} b_n}$ *dla dowolnego* $c > 0$. *Zauważmy, że*

$$\lim_{n\to\infty} c^{b_n} = \lim_{n\to\infty} c^{b_n - b} c^b = c^b \lim_{n\to\infty} c^{b_n - b} = c^{\lim_{n\to\infty} b_n} \lim_{n\to\infty} c^{b_n - b}.$$

Oczywiście $\lim_{n\to\infty}(b_n - b) = 0$. *Pokażemy, że jeśli* $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$ *to* $\lim_{n\to\infty} c^{d_n} = 1$. *Możemy założyć wpierw, że* $c > 1$. *Niech* $\epsilon > 0$, *wtedy istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że jeśli* $n \geq n_0$ *to*

$$1 \leq c^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \epsilon, \text{ oraz } |d_n| < \frac{1}{n_0},$$

więc

$$\frac{1}{1+\epsilon} \leq c^{d_n} < c^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \epsilon.$$

Mamy więc $\lim_{n\to\infty} c^{d_n} = 1$ *a stąd mamy* $\lim_{n\to\infty} c^{b_n} = c^{\lim_{n\to\infty} b_n}$. *Jeśli* $c \in (0,1)$ *to* $\frac{1}{c} > 1$ *i wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} c^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{1}{c})^{b_n}} = \frac{1}{(\frac{1}{c})^b} = c^b = c^{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Niech $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ *i niech* $0 < \epsilon$ *jest takie, że* $0 < a - \epsilon$, *to*

$$(a - \epsilon)^{b_n} < a_n^{b_n} < (a + \epsilon)^{b_n}.$$

Niech $S = \{x \in \mathbb{R}: \exists (k_n)_{n=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{k_n}^{b_{k_n}} = x\}$ *będzie zbiorem punktów skupienia ciągu* $a_n^{b_n}$*, to wtedy dla każdego* $\epsilon > 0$ *i każdego* $x \in S$ *istnieje podciąg ciągu* $a_n^{b_n}$ *zbieżny do* $x \in S$ *a wtedy*

$$(a-\epsilon)^b = \lim_{n\to\infty}(a-\epsilon)^{b_{k_n}} \leq \lim_{n\to\infty} a_{k_n}^{b_{k_n}} = x \leq \lim_{n\to\infty}(a+\epsilon)^{b_{k_n}} = (a+\epsilon)^b.$$

Więc ostatecznie dla każdego $\epsilon > 0$ *mamy:*

$$S \subset ((a-\epsilon)^b, (a+\epsilon)^b).$$

Niech $\epsilon_n := \frac{a}{n}$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *to wtedy*

$$\lim_{n\to\infty}(a+\epsilon_n)^b = a^b \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\epsilon_n}{a}\right)^b = a^b \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{b}{n}} < a^b \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{b}{n}} = a^b \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^b} = a^b 1 = a^b.$$

Podobnie

$$\lim_{n\to\infty}(a-\epsilon_n)^b = a^b \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\epsilon_n}{a}\right)^b = a^b \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{b}{n}} > a^b \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{b}{n}} = a^b \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^b}} = a^b.$$

Stąd ostatecznie mamy

$$\emptyset \neq S \subset \bigcap_{\epsilon>0}[(a-\epsilon)^b, (a+\epsilon)^b] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[(a-\epsilon_n)^b, (a+\epsilon_n)^b] = \{a^b\}.$$

Więc zbiór punktów skupienia ciągu $a_n^{b_n}$ *jest jednoelementowy* $S = \{a^b\}$*, co dowodzi, że* $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$*, co kończy dowód p-ktu* 5*-tego.* ■

Twierdzenie 1.3.8 *Jeśli ciąg* $\lim_{n\to\infty} = g \in \mathbb{R}$*, to*

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = g,$
2. *jeśli* $a_n \geq 0$ *to* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_n} = g.$

Dowód. *Pokażemy punkt (1), zakładając zbieżność ciągu* a_n*. Niech* $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$*, będzie dowolnę liczbą rzeczywistą dodatnią, to isnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *taka, że* $n > n_0$ *to* $|a_n - g| < \epsilon$*. Wtedy mamy*

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\frac{\sum_{i=1}^{n} a_n}{n} - g\right| &= \left|\frac{\sum_{i=1}^{n_0} a_i}{n} + \frac{\sum_{i=n_0+1}^{n} a_n - g}{n}\right| \\ &\leq \left|\frac{\sum_{i=1}^{n_0} a_i}{n}\right| + \left|\frac{\sum_{i=n_0+1}^{n}(a_n - g)}{n}\right| \leq \left|\frac{\sum_{i=1}^{n_0} a_i}{n}\right| + \frac{(n-n_0)\epsilon}{n} \\ &= \left|\frac{\sum_{i=1}^{n_0} a_i}{n}\right| + \frac{n-n_0}{n}\epsilon. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy mamy

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} a_n}{n} - g \right| \leq \lim_{n\to\infty} \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^{n_0} a_i}{n} \right| + \frac{n-n_0}{n}\epsilon \right) = 0 + \epsilon = \epsilon,$$

co kończy dowód częsci pierwszej, bo $\epsilon > 0$ było dowolne. Drugą część twierdzenia dowodzi się analogicznie. ■

Twierdzenie 1.3.9 *Mamy dwa następujące zdania:*

1. *Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = g$, to $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = g$.*
2. *Jeśli $a_n > 0$ i $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}_n = g$.*

Dowód. *Jeśli spełnione jest załozenie (1), to biorąc $b_n = a_n - a_{n-1}$ dla $n > 1$ oraz $b_1 = a_1$ i $a_0 = 0$ to wtedy z założenia $\lim_{n\to\infty} b_n = g$ więc z poprzedniego Twierdzenia mamy:*

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{i-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_0}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Podobnie dowodzimy drugiego punktu (2), biorąc za $c_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ dla $n > 1$ oraz $c_1 = a_1$. To wtedy $\lim_{n\to\infty} c_n = g$, więc z poprzedniego twierdzenia mamy

$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} c_i} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}_n,$$

co kończy dowód. ■

Przykład 1.3.6 *Niech $a_n = \sqrt[n]{n}$, to jesłi $b_n = n$ dla $n \in \mathbb{N}$ to wtedy $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = 1$, więc z poprzedniego twierdzenia mamy $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, czyli*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Zadania: ciągi

Zadanie 9 *Proszę zbadać, czy następujące ciągi są ograniczone:*

a) $a_n = \sqrt[n]{n}$; *b)* $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; *c)* $c_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n}$; *d)* $d_0 = 1 \wedge d_{n+1} = \sqrt{2 + d_n}$.

Zadanie 10 *Proszę zbadać, czy następujące ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:*

a) $a_n - \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n}$; *b)* $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$; *c)* $c_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n}$;

d) $d_0 = 1 \wedge d_{n+1} = \sqrt{2 + d_n}$; *e)* $e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$ *f)* $f_n = \frac{n!}{n^n}$ *g)* $g_n = \sqrt[n]{n}$.

Zadanie 11 *Korzystajac z twierdzenia o ciągu ograniczonym i monotonicznym, proszę uzasadnić istnienie granic podanych ciągów a następnie je wyznaczyć:*

$$a)\ a_n = \frac{100^n}{n!};\quad b)\ b_0 = \sqrt{2} \wedge b_{n+1} = \sqrt{2+b_n};\quad c)\ c_0 = 1 \wedge c_{n+1} = \frac{1}{1+c_n}.$$

Zadanie 12 *Niech $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bedzie dodatnią liczbą naturalną oraz dodatni ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, taki że $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Proszę pokazać, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.*

Zadanie 13 *Niech $x \in X^{\mathbb{N}}$ będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej (X, d). Proszę udowodnić następujacy fakt:*

$$(\forall y \in X)(x \textit{jest zbieżny do } y \longleftrightarrow \textit{każdy podciag } x \textit{ jest zbieżny do } y).$$

Zadanie 14 *Korzystając z definicji granicy ciągu liczbowego, prosze uzasadnić że:*

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1-3n}{1+n} = -3;\quad b)\ b > 0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1;\quad c)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0;\quad d)\ \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Zadanie 15 *Korzystajac z twierdzenia o arytmetyce granic, proszę obliczyć granice następujacych ciągów:*

$$\frac{n^2-3n^3+n^4}{n^4-n^3+n+1};\quad \frac{1+2+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}};\quad \sqrt{n^2+n}-n;\quad \frac{(\sqrt[3]{n}+1)^{33}}{(\sqrt{n}+1)^{22}}.$$

Zadanie 16 *Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, proszę oliczyć granice następujacych ciagów:*

$$\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n};\quad \frac{2+n\cdot\sin n}{n^2+1};\quad \frac{[\sqrt{2}\cdot n]}{n};\quad \sqrt[n]{n};\quad \frac{2}{\sqrt{4^n+2}}+\ldots+\frac{2^n}{\sqrt{4^n+2^n}}.$$

Tutaj mamy $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z})([x] = n \longleftrightarrow n \leq x < n+1)$.

Zadanie 17 *Proszę wyznaczyć granice podanych ciągów liczbowych:*

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n;\quad \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{3n};\quad \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n+1}.$$

Zadanie 18 *Korzystajac z definicji granicy niewłaściwej ciągiu liczbowego, prosze udowodnić, że:*

$$\lim_{n\to\infty}(2^n-5) = \infty;\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty;\quad \lim_{n\to\infty}(3-\log_2 n) = -\infty.$$

Zadanie 19 *Korzystając z twierdzenia o dwóch ciagach, proszę wyznaczyć granice niewłaściwe podanych ciągów:*

$$(2\cdot\cos n - 8)\cdot n^2;\quad \frac{1}{\sqrt{1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Zadanie 20 *Prosze udowodnic:*

$(\forall a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})(\forall x \in \mathbb{R})(x$ *jest p-ktem skupienia ciągu* $a \longleftrightarrow$ *istnieje podciąg ciągu* a *zbieżny do* $x)$.

Zadanie 21 *Proszę podac przykłady ciągów liczbowych, dla których podane zbiory są zbiorami punktów skupienia tych ciągów:*

$$\{0, \infty\}; \quad \left\{\frac{1}{n+1} : \ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}; \quad \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Zadanie 22 *Proszę udowodnić, że nie istnieje ciąg liczbowy, którego zbiorem punktów skupienia jest zbiór liczb wymiernych* $\mathbb{Q}$.

Zadanie 23 *Proszę wyznaczyć granice górne oraz granice dolne podanych ciągów liczbowych:*

$$(-1)^n; \quad \sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{3}; \quad 3 \cdot (-1)^{[\frac{n}{2}]} + 5 \cdot (-1)^{[\frac{n}{3}]}.$$

Zadanie 24 *Prosze udowodnić:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}})(\forall g \in \mathbb{R})(\lim_{n\to\infty} a_n = g \longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup a_n = g = \lim_{n\to\infty} \inf a_n).$$

Zadanie 25* *Niech* x_n *będzie liczbą zer na końcu liczby* $n!$ *(w układzie dziesiętnym). Czy istnieje granica ciągu* $y_n = \frac{x_n}{n}$ *dla liczb naturalnych* $n \in \mathbb{N}$*, takich że* $n > 0$ *?*

1.4 Szeregi liczbowe

W tym rozdziale zajmiemy się pojęciem szeregów liczbowych i iloczynów nieskończonych. Zaczniemy więc od definicji szeregu liczbowego.

Definicja 1.4.1 (Szereg liczbowy) *Niech dany będzie ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, niech $N \in \mathbb{N}$ to N–tą sumą częśćiową nazywamy wyrazenie*

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Szereg liczbowy ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny $\longleftrightarrow$ ciąg sum częściowych $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ jest zbieżny. Wówczas oznaczamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Natychmiast zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.4.1 (Cauchy'ego) *Szereg ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m > n_0) \quad m < n \longrightarrow \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon.$$

Dowód. *Prosta konsekwencja twierdzenia Cauchy'ego o ciągu sum częściowych S_N. Mianowicie, niech $\epsilon > 0$, wtedy istniaje liczba naturalna $n_0 \in \mathbb{N}$ taka że dla dowolnych liczb $m, n > n_n0$ takich że jeżeli $m < n$, to wtedy*

$$\epsilon > |S_n - S_m| = |a_0 + \ldots + a_n - (a_0 + \ldots + a_m)| = |a_{m+1} + \ldots + a_n|.$$

■

Twierdzenie 1.4.2 (warunek konieczny) *Jeśli szereg ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dowód. *Załóżmy że ciąg sum częściowych S_N ciągu a_n jest zbieżny do S, to wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

■

Twierdzenie 1.4.3 (warunek konieczny) *Jeśli szereg ciągu malejącego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to*

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0.$$

Dowód. *Niech $\epsilon > 0$, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że $n, m > n_0$ to dla $n > n_0$*

$$\epsilon > \left|\sum_{k=n_0}^{n} a_k\right| \geq (n - n_0)a_n \geq 0,$$

oczywiście z poprzedniego twierdzenia wynika, że $lim_{n\to\infty} n_0 a_n = 0$, więc

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \epsilon.$$

Natomiast $\epsilon > 0$ jest dowolne, więc mamy tezę naszego twierdzenia. ■

Przykład 1.4.1 *Jeśli szereg*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

byl zbieżny, to korzystaiąc z tego że $a_n = \frac{1}{n}$ jest malejący, mielibyśmy z poprzedniego twierdzenia następującą równość:

$$0 = \lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n} = 1,$$

co jest nieprawdą.

Twierdzenie 1.4.4 (Kryterium porównawcze) *Niech będą dane dwa szeregi o wyrazach dodatnich, takich, że istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla $n > n_0$ mamy $0 \leq a_n \leq b_n$, to wtedy*

1. *jeśli szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to $\sum a_n$ jest również zbieżny,*
2. *jeśli szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny to $\sum b_n$ jest rozbieżny.*

Dowód. *Niech dany szereg $\sum b_n$ będzie zbieżny, to wtedy dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla dowolnego $n, m > 0$ mamy $|\sum_{k=m+1}^{k} b_k| < \epsilon$, więc*

$$|\sum_{k=m+1}^{k} a_k| = \sum_{k=m+1}^{k} a_k \leq \sum_{k=m+1}^{k} b_k = |\sum_{k=m+1}^{k} b_k| < \epsilon$$

co wobec twierdzenia Cauchy'ego wnosimy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Drugie zdanie wynika z pierwszego, co kończy dowód. ■

Twierdzenie 1.4.5 (Kryterium ilorazowe) *Niech będą dane dwa ciągi dodatnie $(a)_{n=1}^{\infty}, (b)_{n=1}^{\infty}$, takie że $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q \in (0, \infty)$, to wtedy*

$$\sum a_n \text{ jest zbieżny (rozb) wtedy i tylko wtedy gdy } \sum b_n \text{ jest zbieżny (rozb).}$$

Dowód. *Załóżmy, że szereg* $\sum a_n$ *jest zbieżny, niech* $\epsilon > 0$ *takie że* $0 < q - \epsilon$*, to istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, że* $n > n_0$ *to*

$$0 < q - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < q + \epsilon,$$

więc

$$0 < (q - \epsilon)b_n < a_n < (q + \epsilon)b_n$$

więc z kryterium porównawczego mamy zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} (q - \epsilon)b_n$ *a stąd mamy zbieżność szeregu* $\sum b_n$ *co zakończyło dowód naszego twierdzenia.* ■

Twierdzenie 1.4.6 (o zagęszczaniu) *Niech będzie dany ciąg liczbowy spełniający warunki:*

1. *ciąg* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *jest malejący,*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

to szereg $\sum a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy szereg* $\sum 2^n a_{2^n}$ *jest zbieżny.*

Dowód. *Niech dany szereg* $\sum a_n$ *będzie zbieżny, to wtedy dla dowolnego* $\epsilon > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, że dla dowolnego* $n, m > 0$ *mamy* $|\sum\limits_{k=m+1}^{k} a_k| < \epsilon$*, więc*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} 22^{k-1} a_{2^k} \leq 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} a_i = 2 \sum_{k=1}^{2^n} a_k$$

szereg większy jest zbieżny więc na podstawie kryterium porównawczego mamy szereg zbieżny który jest mniejszy. i na odwrót:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + \sum_{k=1}^{2^n} a_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} a_k \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2^i a_{2^{i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1} a_{2^{i+1}},$$

co kończy dowód twierdzenia. ■

Twierdzenie 1.4.7 *Jeśli szereg* $\sum |a_n|$ *jest zbieżny, to* $\sum a_n$ *zbieżny jest również.*

Dowód. *Jeśli* $\sum |a_n|$ *jest zbieżny, to dla dowolnego* $\epsilon > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, że dla dowolnego* $n, m > n_0$ *mamy*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} |a_k| \right| < \epsilon,$$

więc

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| = \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \epsilon,$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Twierdzenie 1.4.8 (Kryterium Cauchy'ego) *Niech będzie dany ciąg* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *to wtedy:*

1. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$ *to* $\sum a_n$ *jest zbieżny.*

2. *Jeżeli* $\{n \in \mathbb{N} : \ 1 \leq \sqrt[n]{|a_n|}\}$ *jest nieskończony, to* $\sum a_n$ *jest rozbieżny. W szczególności, jeśli* $\lim_{n\to\infty} \inf \sqrt[n]{|a_n|} = q > 1$, *to* $\sum a_n$ *jest rozbieżny.*

Dowód. *Niech* $\epsilon > 0$ *będzie taką liczbą rzeczywistą dodatnią, że spełniony jest warunek* $q + \epsilon < 1$ *to isnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że* $n \geq n_0$, *to* $\sqrt[n]{|a_n|} < q_0 := q + \epsilon < 1$ *więc* $|a_n| < {q_0}^n$ *a stąd mamy dla dowolnego* $M > n_0$

$$\left|\sum_{k=n_0}^{M} a_k\right| \leq \sum_{k=n_0}^{M} |a_k| \leq \sum_{k=n_0}^{M} {q_0}^k < \sum_{k=n_0}^{\infty} {q_0}^k = {q_0}^{n_0} \frac{1}{1-q_0}$$

co dowodzi przypadku pierwszego.

W drugim przypadku, biorąc za $q' \in \mathbb{R}$ *takie że* $1 < q' < q$ *to istnieje takie* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że dla nieskończenie wielu* n $1 \leq \sqrt[n]{|a_n|}$. *Więc dla nieskończenie wiele liczb naturalnych* $n \in \mathbb{N}$ *may* $1 \leq |a_n|$. *To zaś implikuje, że nieprawdą jest* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a więc z warunku koniecznego zbieżności szeregu, rozważany szereg* $\sum a_n$ *jest rozbieżny.* ■

Twierdzenie 1.4.9 (Kryterium D'Alamberta) *Niech będzie dany ciąg* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *oraz* $a_n \neq 0$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *to wtedy:*

1. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} \sup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q < 1$ *to* $\sum a_n$ *jest zbieżny.*

2. *Jeżeli istnieje liczba* $n_0 \in \mathbb{N}$ *taka, że dla dowolnego* $n > n_0$ *zachodzi* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$, *to szereg* $\sum a_n$ *jest rozbieżny. W szczególności, jeśli* $\lim_{n\to\infty} \inf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q > 1$, *to* $\sum a_n$ *jest rozbieżny.*

Dowód. *Wybierzmy* $q_0 \in \mathbb{R}$ *takie że* $q < q_0 < 1$, *więc istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takie, że dla* $n > n_0$ $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q_0 < 1$. *Więc dla* $n > n_0$ *mamy*

$$\left|\frac{a_n}{a_{n_0}}\right| = \prod_{k=n_0}^{n-1} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < {q_0}^n$$

a stąd

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=n_0}^{n} |a_k| < \sum_{k=n_0}^{n-1} {q_0}^k a_{n_0} \leq a_{n_0} {q_0}^{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} {q_0}^k = \frac{1}{1-q_0}$$

co dowodzi pierwszego zdania.

W drugim przypadku, jeżeli istnieje liczba naturalna n_0 taka że dla dowolnego $n \geq n_0$ $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$. Wtedy dla dowolnego $n > n_0$ mamy

$$|a_{n_0+1}| \leq |a_{n_0+2}| \leq \ldots \leq |a_n|.$$

Więc nieprawdą jest że $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ a stąd $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Więc szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

■

1.5 Iloczyny nieskończone

Definicja 1.5.1 *Niech dany będzie ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, to ciąg iloczynów częściowych $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ definiujemy jako:*

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Jeśli ciąg iloczynów częściowych p_n jest zbieżny do $p \in \mathbb{R}$, to granicę tę nazywamy iloczynem nieskończony ciągu a_n i oznaczamy:

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Jeśli $p = 0$ lub $p = \infty$, to iloczyn taki nazywamy rozbieżnym iloczynem nieskończonym.

Twierdzenie 1.5.1 (Cauchy'ego) *Niech będzie dany ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, to iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \ \ n > m > n_0 \quad \longrightarrow \quad \left| \prod_{k=m}^{n} a_k - 1 \right| < \epsilon.$$

Dowód. *Nich nasz iloczyn będzie zbieżny do $p \in \mathbb{R}$ to oczywiście istnieją takie $d, g \in \mathbb{R}$, że $0 < d < p_n < g$ dla $n \in \mathbb{N}$, weźmy dowolną liczbe $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$, to instnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ $n, m > n_0$, to $|p_n - p_m| < d\epsilon$ a stąd*

$$\left| \frac{p_n}{p_m} - 1 \right| < \frac{\epsilon d}{p_m} < \frac{\epsilon d}{d} = \epsilon,$$

więc dowód w jedną stronę został zakończony.

Załóżmy, że teraz spełniony jest warunek w twierdzeniu, to biorąc za $\epsilon = 1$ mamy

$$0 = \epsilon - 1 < \frac{p_n}{p_m} < \epsilon + 1 = 2 \text{ dla } n > m = n_0 + 1 > n_0.$$

w takim razie ciąg $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$ *jest ograniczony przez pewną liczbę* $M \in \mathbb{R}$. *Więc z naszego założenia wynika, że jeśli* $\epsilon > 0$ *jest dowolne, to iistnieje takie* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że dla dowolnego* $n > m > n_0$ *zachodzi*

$$\left|\frac{p_n}{p_m} - 1\right| < \frac{\epsilon}{M},$$

a stąd mamy

$$\left|p_n - p_m\right| < \frac{\epsilon p_m}{M} < \frac{\epsilon M}{M} = \epsilon.$$

wieć z twierdzenia Cauchy'ego o zbieżności ciągów wnosimy, że ciąg p_n *jest zbieżny do pewnego* $p \in \mathbb{R}$. *Pozostało nam do udowodnienia, że* $p \neq 0$. *Gdyby tak niebyło, to istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ *to*

$$\left|\frac{p_n}{p_{n_0+1}} - 1\right| < \frac{1}{2},$$

a stąd mamy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ *większego od* n_0

$$\frac{1}{2} < \frac{p_n}{p_{n_0+1}},$$

oraz

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} < \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n_0+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} p_n}{p_{n_0+1}} = 0$$

co prowadzi do sprzeczności. ■

Twierdzenie 1.5.2 (warunek konieczny zbieżności iloczynu) *Jeśli iloczyn nieskończony* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Dowód. *Dowód tego twierdzenia jest elementarny.*■

Twierdzenie 1.5.3 *Niech będzie dany ciąg liczbowy* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *o wyrazach dodatnich. To wtedy iloczyn nieskończony* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + b_n)$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny.*

Dowód. *Niech* $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n}(1 + b_k)$ *i* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. *Zauważmy, że*

$$1 + s_n \leq p_n \leq \prod_{k=1}^{n} e^{b_k} = e^{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k},$$

więc p_n *jest ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy* s_n *jest ograniczony. Oczywiście oba ciągi* s_n, p_n *są rosnęce, więc ze zbieżności jednego ciągu wynika zbieżność drugiego. Pozostało udowodnić, że* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n \neq 0$, *ten fakt natychmiast wynika z nierówności*

$$1 \leq 1 + s_n \leq p_n \quad dla \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Dowód twierdzenia został zakończony. ■

1.6 Szeregi potęgowe

Definicja 1.6.1 *Niech będzie dany ciąg liczbowy* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *to*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

nazywamy szeregiem potęgowym o środku x_0 *(o ile jest zbieżny w* x*).*

Definicja 1.6.2 (zbieżność jednostajna) *Niech* $f_n : D \mapsto \mathbb{R}$ *będzie ciągiem funkcyjnym na* $D \subset \mathbb{R}$ *oraz* $f : D \mapsto \mathbb{R}$ *to*

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } D \longleftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\ \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Twierdzenie 1.6.1 *Niech* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *będzie ciąg liczbowy oraz niech* $q = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *to wtedy*

1. *jeśli* $x \in (-\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$ *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest zbieżny bezwzględnie. Jeśli* $q = 0$, *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest zbieżny bezwzględnie dla każdego* $x \in \mathbb{R}$,
2. $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \rightrightarrows f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *na* $[-c, c] \subset (-\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$,
3. *jeśli* $|x| > \frac{1}{q}$ *to* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest rozbieżny.*

Dowód. *1). Niech* $q = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *i niech* $\epsilon > 0$ *będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, to istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *że dla* $n > n_0$ *mamy* $q + \epsilon > \sqrt[n]{|a_n|}$. *To* $|a_n| < (q+\epsilon)^n$ *dla* $n > n_0$. *Z drugiej strony wiemy że* $|x| < \frac{1}{q}$ *a więc* $|x(q+\epsilon)| < 1$ *dla pewnego* $\epsilon > 0$. *Mamy więc*

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n x^n\Big| &\le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n x^n| \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{(q+\epsilon)^n}|x(q+\epsilon)|^n \\ &< \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x(q+\epsilon)|^n = \frac{(x(q+\epsilon))^{n_0+1}}{1-x(q+\epsilon)},\end{aligned}$$

stąd szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest zbieżny bezwzględnie dla* $x \in (-\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$.

Dowód 2). Niech $0 \le c < \frac{1}{q}$ *i* $\epsilon > 0$ *to na mocy* 1) *istnieje* $n \in \mathbb{N}$, *że dla* $k > n$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| c^k < \epsilon$$

a więc dla każdego $x \in [-c, c]$ mamy

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k x^k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| c^k < \epsilon$$

co jest równoważne ze zbieżnością jednostajną ciągu sum częściewych $f_n \rightrightarrows f$ na $[-a, a]$.

Dowód 3). Niech $|x| > \frac{1}{q}$, to $q > \frac{1}{|x|}$ stąd istnieje podciąg $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ że

$$dla\ n \in \mathbb{N}\ \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} > \frac{1}{|x|} \longrightarrow |a_{k_n} x^{k_n}| > 1 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n x^n \neq 0,$$

więc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest rozbieżny, co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Wniosek 1.6.1 *Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczbowym, to wówczas*

1. *Jeśli $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ istnieje, to dla każdego $x \in (-\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny bezwzględnie,*

2. *Jeśli $q = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ istnieje, to dla każdego $x \in (-\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny bezwzględnie.*

Dowód. *Wystarczy zauważyć, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ istnieje, to $\lim\limits_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ co dowodzi 1) stosując powyższe twierdzenie. Natomiast jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ istnieje, to wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ i stosujemy 1).* ■

Na podstawie powyższego twierdzenia możemy wprowadzić następującą definicję:

Definicja 1.6.3 (promień zbieżności) *Niech będzie dany szereg potęgowy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

to liczbę

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|}} & gdy \quad \lim\limits_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, \infty) \\ \infty & gdy \quad \lim\limits_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ 0 & gdy \quad \lim\limits_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|} = \infty. \end{cases}$$

nazywamy promieniem zbieżności.

Uwaga 1.6.1 *Jeśli $R \in [0, \infty)$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ to*

- *szereg jest zbieżny w przedziale* $(x_0 - R, x_0 + R)$
- *szereg jest rozbieżny na zbiorze* $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$
- *w punktach* $x_0 - R$ *i* $x_0 + R$ *zbieżność zależy od szeregu potęgowego.*

Zbiór

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \textit{ jest zbieżny}\right\}$$

nazywamy przedziałem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Przykład 1.6.1 *Zbadać przedział zbieżności szeregu potęgowego*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(x-3)^n.$$

Tutaj $x_0 = 3$ *oraz* $a_n = n$*, więc*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right| = 1.$$

Więc dla $x \in (3-1, 3+1) = (2,4)$ *szereg jest zbieżny. Oczywiście dla* $x = 2$ *i* $x = 4$ *mamy rozbieżność szeregów*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n \textit{ oraz } \sum_{n=0}^{\infty} n,$$

więc ostatecznie $(2,4)$ *jest przedziałem zbieżności naszego szeregu potęgowego.*

Rozdział 2

Funkcje rzeczywiste

2.1 Pojęcie funkcji

Rozdział ten poświęcony jest pojęciu funkcji i jej podstawowych własności. Funkcję pojawiają się niemal we wszystkich działach matematyki. Wiele pojęć zawdzięczają swoje istnienie właśnie dzięki funkcji, jak na przykład pojęcie ciągu liczbowego. Pojęcie funkcji zostało sformułowane na gruncie aksjomatycznej teorii mnogości. Funkcja jest zbiorem o zadanych własnościach i nie musi być definiowane w kontekście innych zbiorów, patrz 7.1. Dla łatwiejszego przyswojenia wspomnianego pojęcia, podamy je używając dwóch zbiorów.

Definicja 2.1.1 *Niech będą dane zbiory f, X, Y, to powiemy, że $f \subseteq X \times Y$ jest funkcją, jeżeli zachodzi warunek:*

$$(\forall x \in X)(\forall y, y' \in Y)\ ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f) \longrightarrow y = y'.$$

Ponadto, dla dowolnych $x \in X$ i $y \in Y$ powiemy, że $y = f(x)$ jesli zajdzie warunek $(x, y) \in f$.

Najprostszym przykładem funkcji w $X \times Y$ jest zbiór pusty. Mianowicie $\emptyset \subseteq X \times Y$ oraz zdanie

$$(\forall x \in X)(\forall y, y' \in Y)\ ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f) \longrightarrow y = y'$$

jest prawdziwe, ponieważ poprzednik implikacji jest nie spełniony (tzn. jest fałszywy). Innym przykładem jest funkcja stała. Niech $c \in Y$, to zbiór

$$c_X = X \times \{c\} \subseteq X \times Y$$

jest funkcją i nazywamy ją funkcją stałą.

Jeżeli założymy, że $X = Y$, to wtedy

$$id_X = \{(x, x) :\ x \in X\}$$

jest funkcją w $X \times X$ i nazywamy ją identycznością.

Wprowadzimy teraz pojęcie dziedziny i przeciwdziedziny funkcji.

Definicja 2.1.2 *Niech $f \subseteq X \times Y$ będzie funkcją, to zbiór*

$$dom(f) = \{x \in X : \ \exists y \in Y \ (x, y) \in f\}$$

nazywamy dziedziną funkcji f. Dziedzinę funkcji f, możemy również oznaczać przez D_f zamiast $dom(f)$. Natomiast zbiór

$$rng(f) = \{y \in Y : \ (x, y) \in f\}$$

nazywamy przeciwdziedziną (lub zakresem) funkcji f.

Jeżeli $dom(f) = X$, zamiast $f \subseteq X \times Y$ jest funkcją, piszemy $f : X \to Y$.

Tak więc, mamy

$$dom(c_X) = X, \quad oraz\ rng(c_X) = \{c\},$$

$$dom(id_X) = X = rng(id_X)$$

i wtedy możemy pisać $id_X : X \to X$, oraz $c_X : X \to Y$.

Jeżeli $X = Y = \mathbb{R}$ i $f \subseteq X \times Y$ jest funkcją, to f nazywamy funkcją rzeczywistą. Wtedy

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x \cdot y = 1\}$$

jest funkcją. Wówczas mamy $dpm(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = rng(f)$. Naszą funkcję możemy zapisać, też tak

$$f = \left\{ \left(x, \frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x \neq 0 \right\}.$$

Dla niezerowej liczby rzeczywistej x, możemy zapisać $f(x) = \frac{1}{x}$, ponieważ $\left(x, \frac{1}{x}\right) \in f$.

Dla zadanej funkcji $f \subseteq X \times Y$ i podzbioru $A \subseteq X$, możemy zdefiniować

$$f \restriction A = \{x, y) \in f : \ x \in A\} \subseteq X \times Y.$$

Łatwo się przekonujemy, że $f \restriction A \subseteq X \times Y$ również jest funkcją. Wtedy $f \restriction A$ nazywamy obcięciem (lub zawężeniem) funkcji f do zbioru A.

Dla zadanej funkcji $f \subseteq X \times Y$ możemy zdefiniować

$$f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : \ (x, y) \in f\}.$$

Wówczas $id_X^{-1} = id_X$ jest funkcją. Wtedy $dom(id_X) = dom(id_X^{-1}) = X = rng(id_X^{-1}) = rng(id_X)$.

Zauważmy, że dla funkcji stałej $c_X = X \times \{c\}$ takiej, że X ma przynajmniej dwa elementy, zbiór

$$c_X^{-1} = \{c\} \times X \subseteq Y \times X$$

nie jest funkcją !

Pojęcie różnowartościowości funkcji $f \subseteq X \times Y$ gwarantuje nam, że $f^{-1} \subseteq Y \times X$ jest funkcją i wtedy taką funkcję nazywamy funkcją odwrotną do funkcji f.

Definicja 2.1.3 (funkcja różnowartościowa (iniekcja)) *Niech $f \subseteq X \times Y$ będzie funkcją. Wtedy f jest różnowartościowa (iniekcja) jeśli zachodzi warunek:*

$$(\forall x, x' \in X)(\forall y \in Y)\ (((x,y) \in f \wedge (x',y) \in f) \longrightarrow x = x').$$

Wtedy możemy pisać f jest "$1-1$".

Powyższy warunek na różnowartościowość możemy sformułować następująco (co ma praktyczne znaczenie):

$$(\forall x, x' \in X)(\forall y \in Y)\ (f(x) = y = f(x) \longrightarrow x = x'),$$

lub równoważnie

$$(\forall x, x' \in X)\ (f(x) = f(x') \longrightarrow x = x').$$

Funkcja id_X, czy $\{(x, 1/x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \neq 0\}$ są funkcjami różnowartościowymi. Wprost z definicji funkcji różnowartościowej możemy udowodnić twierdzenie.

Twierdzenie 2.1.1 *Jeżeli $f \subseteq X \times Y$ jest "$1-1$", to wtedy $f^{-1} \subseteq Y \times X$ jest też funkcją "$1-1$" taką, że*

$$dom(f^{-1}) = rng(f)\ \wedge\ rng(f^{-1}) = dom(f).$$

Dowód. *Niech $f \subseteq X \times y$ będzie funkcją "$1-1$". Wtedy mamy $f^{-1} \subseteq y \times X$. Wpierw pokażemy, że f^{-1} jest funkcją. Niech $y \in Y, x, x' \in X$ będą dowolne, które spełniają warunek $(x,x) \in f^{-1}$ i $(y,x') \in f^{-1}$. Wtedy mamy:*

$$(y,x) \in f^{-1} \wedge (y,x') \in f^{-1} \longleftrightarrow (x,y) \in f \wedge (x',y) \in f \longrightarrow x = x'.$$

Ostatnia implikacje napisana wyżej jest prawdziwa na mocy założenia, że f jest "$1-1$".

Teraz skoro wiemy, że $f^{-1} \subseteq Y \times X$ jest funkcją wykażemy, że f^{-1} jest "$1-1$". Niech $y, y' \in Y$ i $x \in X$ będą takie, że $(y,x) \in f^{-1}$, $(y',x) \in f^{-1}$. Wtedy mamy

$$(y,x) \in f^{-1} \wedge (y',x) \in f^{-1} \longleftrightarrow (x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \longrightarrow y = y'.$$

Ostatnia implikacja jest prawdziwa, ponieważ $f \subseteq X \times Y$ jest funkcją.

Pozostało nam wykazać równości zbiorów wymienionych w treści dowodzonego twierdzenia. Niech $y \in Y$ będzie dowolnym elementem. Wtedy mamy:

$$y \in dom(f^{-1}) \longleftrightarrow \exists x \in X\ (y,x) \in f^{-1} \longleftrightarrow \exists x \in X\ (x,y) \in f \longleftrightarrow y \in rng(f).$$

Wobec dowolności wyboru $y \in Y$ mamy $dom(f^{-1}) = rng(f)$. Podobnie, jeśli $x \in X$ jest dowolny, to

$$x \in rng(f^{-1}) \longleftrightarrow \exists y \in Y\ (y,x) \in f^{-1} \longleftrightarrow \exists y \in Y (x,y) \in f \longleftrightarrow x \in dom(f).$$

Stąd na mocy dowolności wyboru $x \in X$, mamy $rng(f^{-1}) = dom(f)$. ■

Powyższe twierdzenie gwarantuje nam istnienie funkcji odwrotnej do funkcji różnowartościowej. niech $f \subseteq X \times Y$ będzie funkcją różnowartościową oraz niech będą dane $x \in dom(f) = rng(f^{-1})$ oraz $y \in rng(f) = dom(f^{-1})$. Wówczas mamy:

$$y = f(x) \longleftrightarrow (x,y) \in f \longleftrightarrow (y,x) \in f^{-1} \longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Z pojęciem funkcji związane są obraz i przeciwobraz funkcji na zadanym zbiorze.

Definicja 2.1.4 *Niech $f \subseteq X \times Y$ będzie funkcją, natomiast $A \subseteq dom(f)$ oraz $B \subseteq rng(f)$. Wtedy*

$$f[A] = \{y \in Y : \exists a \in A \; y = f(a)\} = \{f(a) \in Y : a \in A\}$$

nazywamy obrazem zbioru A przez funkcję f. Natomiast zbiór

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : \exists b \in B \; b = f(x)\} = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

nazywamy przeciwobrazem zbioru B przez funkcję f.

Przykład 2.1.1 *Niech będzie dana funkcja $f = \{(x, 2x-5) : x \in \mathbb{R}\}$. Wtedy mamy $dom(f) = rng(f) = \mathbb{R}$. Niech $A = [0,1]$ i $B = [-3, 2)$. Wtedy, jesli $x \in A$, to $0 \leq x \leq 1$ więc $0 \leq 2x \leq 2$ a stąd $-5 \leq f(x) = 2x - 5 \leq -3$. W takim razie*

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\} = \{y : y = f(x) \wedge 0 \leq x \leq 1\} = \{y : -5 \leq y \leq -3\} = [-5, 3].$$

Natomiast, jeśli $x \in dom(f)$ jest taki, że $f(x) \in B$, to wtedy

$$-3 \leq 2x - 5 < 2 \longleftrightarrow 2 \leq 2x < 7 \longleftrightarrow 1 \leq x < \frac{7}{2}.$$

Więc $f^{-1}[B] = [1, 7/2)$.

Prócz różnowartościowści funkcji $f \subseteq X \times Y$ ważnym pojęciem jest pojęcie suriekcji funkcji.

Definicja 2.1.5 (Suriekcja) *Powiemy, że funkcja $f \subseteq X \times Y$ jest suriekcją wtedy i tylko wtedy gdy*

$$dom(f) = X \wedge rng(f) = Y.$$

Równoważnie, $f : X \to Y$ jest suriekcją jeżeli $rng(f) = Y$. Możemy wtedy pisać f jest funkcją ze zbioru X na Y lub krótko f jest "na".

Zauważmy, że funkcja z poprzedniego przykładu 2.1.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest iniekcją i jednocześnie suriekcją. Aby się o tym przekonać załóżmy, że $f(x) = f(y)$ to wtedy

$$f(x) = f(y) \longleftrightarrow 2x - 5 = 2y - 5 \longleftrightarrow 2x = 2y \longleftrightarrow x = y.$$

Tak więc f jest $1-1$. Pokażemy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest też suriekcją. Niech $y \in \mathbb{R}$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Niech $x = (y+5)/2 \in \mathbb{R}$, to wtedy

$$f(x) = 2x - 5 = 2 \cdot \frac{y+5}{2} - 5 = (y + 50 - 5 = y.$$

Wobec dowolności wyboru $y \in \mathbb{R}$ widzimy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest suriekcją.

Definicja 2.1.6 (Bijekcja) *Powiemy, że funkcja $f \subseteq X \times$ jest bijekcją pomiędzy zbiorami X i Y jeśli f jest iniekcją i suriekcją.*

Widzimy, że funkcja $f(x) = 2x - 5$ z przykładu 2.1.1 jest bijekcją pomiędzy $\mathbb{R}$. Funkcja $id_X : X \to X$ jest również bijekcją pomiędzy X a X.

Wiele funkcji powstaje z innych funkcji prze operację złożenia.

Definicja 2.1.7 (Złożenie funkcji) *Niech będą dane dwie funkcje $f \subseteq X \times Y$ oraz $g \subseteq Y \times Z$ to zbiór*

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z : \ \exists y \in Y (x, y) \in f \wedge (y, z) \in Z\} \subseteq X \times Z$$

nazywamy złożenie funkcji f z funkcją g.

Zauważmy, że wprost z definicji złożenia funkcji f z funkcją g mamy, $g \circ f(x) = z$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest $y \in Y$ takie, że $f(x) = y$ i $g(y) = z$.

Wpierw udowodnimy następujący fakt.

Fakt 2.1.1 *Jeżeli $f \subseteq X \times Y$ i $g \subseteq Y \times Z$ są funkcjami, to $g \circ f \subseteq X \times Z$ też jest funkcją. Ponadto,*

$$dom(g \circ f = dom(f) \cap \{x \in X : \ f(x) \in dom(g)\} = dom(f) \cap f^{-1}[dom(g)].$$

Dowód. *Niech będą dane $x \in X$ i $z, z' \in Z$ takie że $(x, z) \in g \circ f$ oraz $(x, z') \in g \circ f$. Wtedy istnieją $y, y' \in Y$ takie, że $(x, y) \in f$, $x, y') \in f$ oraz $(y, z), (y', z') \in g$. Ale f jest gunkcją, więc $y = y'$. Stąd mamy, że (y, z) i $(y, z') \in g$. Ponieważ g jest również funkcją, to $z = z'$, co w końcu daje, że $g \circ f$ jest funkcją.*

Aby udowodnić drugą część, weźmy pod uwagę dowolne $x \in X$, to wtedy mamy

$$\begin{aligned}
x \in dom(g \circ f) &\longleftrightarrow (\exists z \in Z)\ (x, z) \in g \circ f \\
&\longleftrightarrow (\exists z \in Z)(\exists y \in Y)\ ((x, y) \in f \wedge (y, z) \in f) \\
&\longleftrightarrow (\exists y \in Y)(\exists z \in Z)\ ((x, y) \in f \wedge (y, z) \in g) \\
&\longleftrightarrow (\exists y \in Y)\ ((x, y) \in f) \wedge ((\exists z \in Z)\ (y, z) \in g) \\
&\longleftrightarrow (\exists y \in Y)\ ((x, y) \in f) \wedge (y \in dom(g)) \\
&\longleftrightarrow (\exists y \in Y)\ ((x, y) \in f \wedge y = f(x) \wedge f(x) \in dom(g)) \\
&\longleftrightarrow x \in dom(f) \wedge f(x) \in dom(g) \longleftrightarrow x \in dom(f) \cap f^{-1}[dom(g)].
\end{aligned}$$

■

Mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1.2 *Niech będą dane funkcje $F : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$, to wtedy mamy:*

1. *jeśli f, g są "1-1", to $g \circ f$ też jest "1-1",*
2. *jeśli f, g są "na", to $g \circ f$ jest również funkcją "na",*
3. *jeżeli f jest bijekcją pomiędzy X a Y i g jest bijekcją pomiędzy Y a Z, to $g \circ f$ jest bijecją pomiędzy X a Z.*

Ponadto, jeżeli $f : X \to Y$ jest bijekcją pomiędzy X a Y, to funkcja odwrotna $f^{-1} : Y \to X$ jest bijekcją pomiędzy Y a X.

Dowód. *Pierwsze trzy punkty pozostawiamy do samodzielnego udowodnienia przez czytelnika. Udowodnimy jedynie ostatnie zdanie. Zauważmy, że jeżeli f jest bijekcją, to na mocy twierdzenia 2.1.1 mamy $dom(f^{-1}) = rng(f) = Y$ oraz $rng(f^{-1}) = dom(f) = X$, co więcej, f^{-1} jest "1-1. Więc $f^{-1} : Y \to X$ jest "na". Tak więc $f^{-1} : Y \to X$ jest bijekcją pomiędzy zbiorami Y a X.* ■

Powiemy, że dwa zbiory X i Y są równoliczne (mają tyle samo elementów) wtedy i tylko wtedy gdy istnieje bijekcja pomiędzy X a Y. Zapisujemy wtedy $X \sim Y$. Zauważmy, że na mocy twierdzenia 2.1.2, $\sim$ jest relacją równoważności w klasie wszystkich zbiorów, to znaczy:

1. $\forall X \; X \sim X$ *- zwrotność,*
2. $\forall X \, \forall Y \; X \sim Y \longrightarrow Y \sim X$ *- symetryczność,*
3. $\forall X \, \forall Y \, \forall Z \; (X \sim Y \wedge Y \sim Z) \longrightarrow X \sim Z$ *- przechodniość.*

Przykład 2.1.2 *Niech $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $(2n+1)\mathbb{N} = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$. Ponieważ funkcja zdefiniowana $f(n) = 2n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest bijekcją pomiędzy $\mathbb{N}$ a $2\mathbb{N}$, to $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$. Podobnie mamy $\mathbb{N} \sim (2n+1)\mathbb{N}$. Z przechodniości i symetryczności relacji $\sim$ mamy $2\mathbb{N} \sim (2n+1)\mathbb{N}$. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ będzie zdefiniowana następująco: dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ mamy*

$$f(k) = \begin{cases} \frac{k}{2} & k \in 2\mathbb{N} \\ -\frac{k-1}{2} & k \in (2n+1)\mathbb{N} \end{cases}.$$

Czytelnik sprawdzi, że rzeczywiście funkcja f ustala bijekcję pomiędzy $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ a więc $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

jeżeli dwa zbiory X, Y są równoliczne tzn. $X \sim Y$, to znaczy, że zbiory X i Y mają tyle samo elementów, czyli mają taką samą moc. Wtedy piszemy $|X| = |Y|$. Jeżeli $\mathbb{N} \sim X$, to piszemy, że $|X| = \aleph_0$. Mówimy wtedy, że zbiór jest przeliczalny.

Dla danego zbioru A istnieje zbiór wszystkich jego podzbiorów i oznaczmy $P(A)$. Zbiór

$$P(A) = \{Y : \; Y \subseteq A\}$$

nazywamy zbiorem potęgowym zbioru A. Dla przykładu mamy $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ponieważ $\emptyset \subseteq \emptyset$ i innych zbiorów Y takich, że $Y \subseteq \emptyset$ nie ma. Dalej, $P(P(\emptyset)) = P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. $P(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Podstawiając za 0 $\emptyset$ a za 1 $\{\emptyset\}$ mamy

$$P(P(P(\emptyset))) = P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1.3 *Dla każdego zbioru A nie istnieje suriekcja A na $P(A)$. Natomiast, istnieje iniekcja A w $P(A)$.*

Dowód. *Załóżmy, że istnieje $f: A \to P(A)$, która jest suriekcją. Definiujemy zbiór B*

$$B = \{a \in A: \ a \notin f(a)\}.$$

Oczywiście $B \in P(A)$. Wtedy jest $a \in A$ takie, że $f(a) = B$. Jeżeli $a \in B = f(a)$, to $a \notin f(a) = B$, co jest niemożliwe. Załóżmy więc, że $a \notin B$, to $\neg(a \notin f(a))$, to znaczy że $a \in f(a) = B$, co również nie jest możliwe. Więc f nie może być suriekcją.

Aby udowodnić drugą część twierdzenie, to dla dowolnego elementu $a \in A$ $f(a) = \{a\} \in P(A)$. Jeżeli dla $a, a' \in A$ $fa) = f(a')$, to wtedy $\{a\} = \{a'\}$ a więc $a = a'$. Więc f jest różnowartościowa. ■

W takim razie, dla każdego zbioru A mamy $|A| \neq |P(A)|$. Ponieważ istnieje iniekcja ze zbioru A w zbiór $P(A)$, więc elementów zbioru A jest nie więcej niż w $P(A)$. Z drugiej strony nie istnieje suriekcja A na $P(A)$, więc możemy powiedzieć, że zbiór A jest mniej liczny niż $P(A)$. Stąd możemy napisać $|A| < |P(A)|$. W takim razie $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|$. Moc zbioru $P(\mathbb{N})$ nazywamy continuum i piszemy $\mathfrak{c} = |P(\mathbb{N})|$. Tak więc zachodzi $\aleph_0 < \mathfrak{c}$.

2.2 Granica funkcji

Kluczowym pojęciem w analizie matematycznej jest pojęcie granicy funkcji rzeczywistej. Zaczynamy więc nasz rozdział od definicji pojęcia punktu skupienia zbioru. Pojęcie to poprzedzi definicję granicy funkcji.

Definicja 2.2.1 (Punkt skupienia zbioru) *Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym podzbiorem prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Ponadto niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie liczba rzeczywistą, to x_0 jest punktem skupienia zbioru A wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall \delta > 0 \ \ A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia: dla $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\delta > 0$ definiujemy

1. *$S(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ sąsiedztwo punktu x_0,*
2. *$S_+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta)$ sąsiedztwo prawostronne punktu x_0,*
3. *$S_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$ sąsiedztwo lewostronne punktu x_0.*

Ponadto dla dowolnej liczby $\delta \in \mathbb{R}$, przedział (δ, ∞) nazywamy otoczeniem w ∞ i oznaczamy go przez $S(\infty, \delta)$. Podobnie, $(-\infty, \delta)$ otoczeniem $-\infty$, które oznaczamy przez $S(-\infty, \delta)$.

Dla zadanego zbioru $D \subseteq \mathbb{R}$ powiemy, że

- *∞ jest punktem skupienia zbioru D jeśli $(\forall \delta \in \mathbb{R})$ $(D \cap S(\infty, \delta) \neq \emptyset)$,*
- *$-\infty$ jest punktem skupienia zbioru D jeśli $(\forall \delta \in \mathbb{R})$ $(D \cap S(-\infty, \delta) \neq \emptyset)$,*
- *$x_0 \in \mathbb{R}$ jest prawostronnym punktem skupienia zbioru D, jeśli*

$$(\forall \delta > 0) \ (D \cap S_+(x_0, \delta) \neq \emptyset),$$

- $x_0 \in \mathbb{R}$ *jest lewostronnym punktem skupienia zbioru* D, *jeśli*

$$(\forall \delta > 0)\ (D \cap S_-(x_0, \delta) \neq \emptyset).$$

Przykład 2.2.1 *Liczba* 0 *jest punktem skupienia zbioru* $(0, 1)$ *a liczba* 2 *już nim nie jest. Podobnie* 0 *jest punktem skupienia zbioru* $\{\frac{1}{n+2} : n \in \mathbb{N}\}$ *a* 1 *już nie. Natomiast kazda liczba rzeczywista jest punktem skupienia zbioru wszystkich liczb wymiernych* $\mathbb{Q}$ *(patrz zadanie* $5^\star$ *liczby rzeczywiste).*

Definicja 2.2.2 (Granica funkcji w sensie Cauchy'ego) *Niech* $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *będzie punktem skupienia zbioru* D. *Niech bedzie dana funkcja rzeczywista* $f : D \mapsto \mathbb{R}$ *i* $g \in \mathbb{R}$ *jest liczbą rzeczywistą, to*

$$(\lim_{x \to x_0} f(x)^{(C)} = g) \longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D \setminus \{x_0\})\ \ (|x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - g)| < \epsilon).$$

Ponadto, jesli $x_0 = \infty$ *jest punktem skupienia dziedziny funkcji* f, *to*

$$(\lim_{x \to x_0} f(x)^{(C)} = g) \longleftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f)\ (x \in (\delta, \infty) \longrightarrow M < f(x)).$$

Analogicznie definiujemy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g$.

Istnieje również równoważna definicja granicy funkcji pochodząca od Heinego:

Definicja 2.2.3 (Granica funkcji w sensie Heinego) *Niech* $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *będzie punktem skupienia zbioru* D. *Niech bedzie dana funkcja rzeczywista* $f : D \mapsto \mathbb{R}$ *i* $g \in \mathbb{R}$ *jest liczbą rzeczywistą, to*

$$(\lim_{x \to x_0} f(x)^{(H)} = g) \longleftrightarrow (\forall y \in (D \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}}\ \ \lim_{n \to \infty} y(n) = x_0 \longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(y(n)) = g).$$

Uwaga 2.2.1 *W literaturze, często możemy się spotkać z tym że, w definicji granicy funkcji zamiast zakładać, że dany punkt jest punktem skupienia dziedziny funkcji* f *przyjmujemy założenie* $S(x_0, \delta) \subseteq D_f$ *dla pewnej liczby* δ.

Obie definicje są równoważne i do niektórych celów wygodniej używać definicję w sensie Cauchy'ego a do innych w sensie Heinego,

Twierdzenie 2.2.1 (ZF+AC) *Obie definicje granicy funkcji w punkcie są równoważne.*

Dowód. *Załóżmy, że definicja Cauchy'ego jest spełniona dla funkcji* f *w* $x_0 \in \mathbb{R}$, *pokażemy, że funkcja spełnia definicję granicy w* x_0 *w sensie Heinego. Tak więc niech będą spełnione założenia w definicji ciągłości w sensie Heinego, tzn.* $(y(n))_{n \in \mathbb{N}}$ *jest dowolnym ciągiem zbieżnym do* x_0, *niech* $\epsilon > 0$, *to istnieje* $\delta > 0$ $|x - x_0| < \delta$, *to* $|f(x) - g| < \epsilon$. *To wtedy istnieje takie* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że jeśli* $n > n_0$ *to* $|y(n) - x_0| < \delta$ $(\lim\limits_{n \to \infty} y(n) = x_0)$, *to dla każdego* $n > n_0$ $|f(y(n)) - g| < \epsilon$ *co jest równoważne, że* $\lim\limits_{n \to \infty} f(y(n)) = g$.

Pozostał nam dowód w drugą stronę, tzn definicja Cauchy'ego wynika z definicji Heinego. W tym celu posłużymy się aksjomatem wyboru AC (axiom of choice). Załóżmy, że twierdzenie jest nieprawdziwe, tzn spełniona jest definicja Heinego i jednocześnie fałszywa jest definicja granicy Cauchy'ego tj.

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R}) \ \ |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - g| \geq \epsilon. \qquad (\ *)$$

Utwórzmy rodzinę zbiorów $\mathcal{F} = \{F_n \subset D : \ n \in \mathbb{N}\}$

$$F_n = \left\{ x \in D : \ \ |x - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - g| \geq \epsilon \right\},$$

ϵ *jest ustalone i nie zależy od* n*, to z własności* $(*)$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ F_n *jest niepusty* $F_n \neq \emptyset$*. Wybierzmy z każdego* F_n *po jednym elemencie* $y(n)$ *(elementy* $y(n)$ *mogą się powtarzać), co w terminologii teorii zbiorów znaczy, że istnieje funkcja wyboru* $y \in (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)^{\mathbb{N}}$ *taka że dla każdego* $n \in \mathbb{N}$, $y(n) \in F_n$*. Więc z definicji naszej rodziny* $\mathcal{F}$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ $|y(n) - x_0| < \frac{1}{n}$ *i jednocześnie* $|f(y(n)) - g| \geq \epsilon$*, ale oczywiście* $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = x_0$ *więc na mocy definicji Heinego* $\lim\limits_{n\to\infty} f(y(n)) = g$*. Stąd istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, że* $|f(y(n_0)) - f(x_0)| < \epsilon$*, tak więc w końcu mamy dla naszego* $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\epsilon \leq |f(y(n)) - g| < \epsilon, \ \ \longrightarrow \epsilon < \epsilon,$$

co prowadzi do sprzeczności, tak więc definicja Cauchy'ego ciągłości funkcji wynika z definicji granicy funkcji w sensie Heinego. ■

Wobec powyższego twierdzenia granicę funkcji f *w punkcie* x_0 *będziemy oznaczać przez* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Twierdzenie 2.2.2 *Istnieje co najwyżej jedna liczba rzeczywista, która jest granicą funkcji* f *w punkcie* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Na podstawie granicy funkcji w sensie Heinego, podany przykład zilustruje sytuację, gdy nie istnieje granica funkcji.

Przykład 2.2.2 *Rozważmy funkcję* $f(x) = \sin(1/x)$*, tutaj dom*$(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Rozważmy dwa ciągi: dla każdego* $0 < n \in \mathbb{N}$ *niech*

$$s_n = \frac{1}{2\pi n}, \ \ t_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}.$$

Oczywiście mamy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$ *oraz*

$$\lim_{n\to\infty} f(s_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = \lim_{n\to\infty} \sin(0) = 0$$

natomiast,

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n + \pi/2) = \lim_{n\to\infty} \sin(\pi/2) = 1.$$

W takim razie, na podstawie definicji granicy funkcji w sensie Heinego, $\lim_{x\to 0} f(t)$ *nie istnieje.*

Oprócz definicji granicy funkcji w zadanym punkcie, możemy mówić o granicy jednostronnej w punkcie.

Definicja 2.2.4 (Granica prawostronna funkcji w sensie Cauchy'ego) *Niech $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru D. Niech będzie dana funkcja rzeczywista $f : D \mapsto \mathbb{R}$ i $g \in \mathbb{R}$ jest liczbą rzeczywistą, to*

$$(\lim_{x \to x_0^+} f(x)^{(C)} = g) \longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \setminus \{x_0\} \;\; |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - g)| < \epsilon).$$

Definicja 2.2.5 (Granica prawostronna funkcji w sensie Heinego) *Niech $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru D. Niech będzie dana funkcja rzeczywista $f : D \mapsto \mathbb{R}$ i $g \in \mathbb{R}$ jest liczbą rzeczywistą, to*

$$(\lim_{x \to x_0^+} f(x)^{(H)} = g) \longleftrightarrow (\forall y \in (D \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}} \;\; \lim_{n \to \infty} y(n) = x_0 \longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(y(n)) = g).$$

Analogicznie definiuje się granicę lewostronną $\lim_{x \to x_0^-} f(x)^{(C)} = g$, i $\lim_{x \to x_0^-} f(x)^{(H)} = g$.

Podobnie jak w przykładzie 2.2.2, $\lim_{x \to 0^+} \sin(1/x)$ nie istnieje. Przejdźmy do kolejnego przykładu.

Przykład 2.2.3 *Niech $a \geq 1$, Pokażemy, że $\lim_{x \to 0} a^x = 1$.*

Skorzystamy, z następującej granicy ciągu $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Niech $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem o nieujemnych wyrazach, dążącym do 0. Udowodnimy, że

$$\lim_{n \to \infty} a^{t_n} = 1.$$

Niech $\epsilon > 0$, wtedy jest $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n > n_0$ mamy

$$0 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$$

Wtedy od pewnego miejsca $m_0 \in \mathbb{N}$ mamy $0 \leq t_n < \frac{1}{n_0+1}$ dla wszystkich $n > m_0$ a więc dla każdego $n > m_0$ mamy

$$1 - \epsilon < 1 \leq a^{t_n} < a^{\frac{1}{n_0+1}} < 1 + \epsilon.$$

Więc $\lim_{x \to x_0} a^{t_n} = 1$, co wobec dowolności wyboru ciągu $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, daje nam

$$\lim_{x \to 0^+} a^x = 1.$$

Niech $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczbowym o niedodatnich wyrazach dążącym do zera. Wtedy mamy

$$\lim_{n \to \infty} a^{s_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a^{-s_n}} = \frac{\lim_{n \to \infty} 1}{\lim_{n \to \infty} a^{-s_n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Skorzystaliśmy tutaj z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów, poprzedniego paragrafu oraz z faktu, że $(-s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ciągiem nieujemnym dążącym do zera . Więc również zachodzi*

$$\lim_{x\to 0^-} a^x = 1.$$

Mamy więc, że dla $a > 1$ *zachodzi* $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$*. Zauważmy, że jeżeli* $a \in (0,1)$*, to* $1/a > 1$ *i wtedy*

$$\lim_{x\to 0} a^x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ostatecznie wykazaliśmy, że dla każdej liczby rzeczywistej $a \in (0,\infty)$ *mamy*

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1.$$

Za sprawą definicji granicy funkcji w sensie Heinego wiele twierdzeń dotyczących granicy ciągów przenosi się na twierdzenia o granicy funkcji w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.2.3 (O trzech funkcjach) *Niech będą dane trzy funkcje* $f, g, h : D \mapsto \mathbb{R}$ *takie że*

- $\exists\delta > 0 \forall x \in D \cap (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}\ \ g(x) \le f(x) \le h(x)$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$,

to granica funkcji f *istnieje w* x_0 *oraz* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}(g) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$.

Dowód. *Niech będzie dany ciąg* $y \in (D\setminus\{x_0\}^{\mathbb{N}}$ *t. że* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ *(tutaj piszemy* y_n *zamiast* $y(n)$*). Więc dla prawie wszystkich* $n \in \mathbb{N}$ $y_n \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$*. Więc dla prawie wszystkich* $n \in \mathbb{N}$ $g(y_n) \le f(y_n) \le h(y_n)$ *oraz z założenia mamy* $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = a$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} h(y_n) = a$ *dla pewnego* $a \in \mathbb{R}$*. Stosując twierdzenie o trzech ciągach mamy* $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = a$*, natomiast ciąg* y *był wybrany w sposób dowolny. Tak więc* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$*, co daje tezę naszego twierdzenia.*
■

Twierdzenie 2.2.4 (O arytmetyce granic funkcji) *Niech będą dane funkcje rzeczywiste* $f, g : D \mapsto \mathbb{R}$ *oraz liczbę rzeczywistą* $x_0 \in \mathbb{R}$*, takie że* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *istnieją. To wtedy mamy:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f-g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

4. *Jeśli g nie jest równa 0 w żadnym punkcie w pewnym otoczeniu punktu x_0 i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, to $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$,*

5. *Jeśli $f > 0$ w pewnym otoczeniu punktu x_0, to $\lim\limits_{x\to x_0}(f^g)(x) = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.*

Dowód. *Dla przykładu udowodnimy ostatni punkt naszego twierdzenia. Niech $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ oraz wybierzmy dowolny ciąg $y \in (D \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}}$ zbieżny do x_0, więc dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ $f(y_n) > 0$ (piszemy y_n zamiast $y(n)$). Stosując twierdzenie o arytmetyce granic ciągów Tw. 1.3.7 (ostatni punkt), mamy*

$$\lim_{n\to\infty}(f(y_n)^{g(y_n)}) = (\lim_{n\to\infty} f(y_n))^{\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n)} = a^b = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Ciąg y został wybrany dowolnie, więc dowód tego punktu twierdzenia jest zakończony. ■
Powyższe twierdzenia mają swoje odpowiedniki dla granic jednostronnych.

Przykład 2.2.4 *Rozważmy funkcję trygonometryczną $\sin x$, wtedy dla każdego $x \in [0, \frac{\pi}{2}$ mamy*

$$-x \leq \sin x \leq x.$$

Na mocy faktu, że $\lim_{x\to 0} x = 0 = \lim_{x\to 0} -x$ i twierdzenia o trzech funkcjach, mamy

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Dalej, stosując twierdzenie o arytmetyce granic funkcji, otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - (\lim_{x\to 0} \sin x)^2} = \sqrt{1 - 0^2} = 1.$$

Przykład 2.2.5 *Niech będzie dane $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ to wtedy mamy*

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$$

dzieląc te dwie nierówności przez x otrzymujemy

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1 \leq \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x}.$$

Podstawiając za x $-y$, wtedy $y \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ mamy

$$\frac{\sin(-y)}{-y} \leq 1 \leq \frac{\operatorname{tg}(-y)}{-y}.$$

oraz korzystając z nieparzystości funkcji $\sin$ i tg mamy

$$\frac{\sin y}{y} \leq 1 \leq \frac{\operatorname{tg} y}{y}.$$

więc nierówności w pierwszej linijce zachodzą dla $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$. *Stąd mamy*

$$(\forall x)\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \longrightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1,$$

ale $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = 1$ *dla* $x_0 = 0$, *wiec stosując tw o* 3 *funkcjach mamy*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Twierdzenie 2.2.5 (Granica funkcji złożonej) *Niech* $f : D \mapsto \mathbb{R}$ *i* $g : E \mapsto \mathbb{R}$ *będą dwiema rzeczywistymi funkcjami takimi że:*

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \wedge \lim\limits_{y \to a} g(y) = b$,
- $\exists \delta > 0 \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \neq a$,
- $f[D] \subseteq E$,

to granica funkcji $g \circ f$ *istnieje w* x_0 *oraz* $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = b$.

Dowód. *Niech będzie dany dowolny ciąg* $x \in (D \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}}$ *zbieżny do* x_0, *to z drugiego założenia, mamy dla prawie wszystkich* $n \in \mathbb{N}$ $f(x(n)) \neq a$, *niech będzie dany ciąg* $y(n) = f(x(n)) \in E$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *(co jest mozliwe na podstawie trzeciego założenia), tak więc dla prawie wszystkich* $n \in \mathbb{N}$ $y(n) \neq a$. *Z pierwszego założenia mamy* $\lim\limits_{n \to \infty} g(y(n)) = b$ *więc*

$$\lim_{n \to \infty} (g \circ f)(x(n)) = \lim_{n \to \infty} g(f(x(n))) = \lim_{n \to \infty} g(y(n)) = b,$$

co wobec dowolności ciągu x *mamy* $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = b$. ■

Przykład 2.2.6 *Obliczyć granicę* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$. *Niech* $g(y) = \frac{\sin y}{y}$ *natomiast* $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$, *to* $a = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0$, *oraz* $b = \lim\limits_{y \to a} g(y) = 1$. *Więc ostatecznie mamy*

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{x - \frac{\pi}{2}} = -\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin(x - \frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} \\ &= -\lim_{x \to x - \frac{\pi}{2}} (g \circ f)(x) = -\lim_{y \to 0} g(y) = -b = -1.\end{aligned}$$

Definicja 2.2.6 (Granica niewłaściwa) *Niech* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, *oraz* $S(x_0, r) \subseteq D$, $f : D \to \mathbb{R}$, *to wtedy*

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) \overset{Heine}{=} \infty \longleftrightarrow (\forall (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}(\ (\lim_{n \to \infty n} t_n = x_0 \longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(t_n) = \infty)$, *analogicznie dla* $-\infty$.

2. $\lim_{x\to x_0} f(x) \overset{Cauchy}{=} \infty \longleftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in S(x_0,\delta))\ (M < f(x))$.

Ponadto, jeśli $x_0 \in \mathbb{R}$, to możemy rozważać granice jednostronne niewłaściwe. Wystarczy zamienić $S(x_0,r)$ przez $S_+(x_0,r)$ aby zdefiniować granicę prawostronną. Na przykład w sensie Cauchyego granica prawostronna niewłaściwa wygląda następująco (tutaj mamy $S_+(x_0,r) = (x_0, x_0+r)$)

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \overset{Cauchy}{=} \infty \longleftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in S(x_0,\delta))\ (M < f(x)).$$

Oczywiście mamy, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = \infty$.

Przykład 2.2.7 *Pokażemy, że $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$. Niech $(t_n)_{n\to\infty}$ będzie ciągiem zbieżnym do ∞. Niech $M > 0$ będzie dowolną liczbą dodatnią, to jest $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdej liczby naturalnej $n > n_0$ $e^M < t_n$,. W takim razie, mamy $M < \ln t_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ większych od n_0. Wobec dowolności wyboru dodatniej liczby M mamy $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Pokazaliśmy, że dla dowolnego ciągu $(t)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takigo, że $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} \ln t_n = \infty$, to w takim razie mamy $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$.*

Mamy analogiczne dwa twierdzenie do twierdzeń o granicach właściwych. Dowody tych twierdzeń są analogiczne do tych o granicach właściwych.

Twierdzenie 2.2.6 (o 2 funkcjach) *Niech $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Niech $f, g : D \to \mathbb{R}$ są takie, że*

1. *x_0 jest punktem skupienia zbioru D,*
2. *jest r t. że dla każdego $x \in S(x_0,r)$ $f(x) \leq g(x)$.*

Wtedy zachodzi:

- *jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, albo*
- *jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, to $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.*

Twierdzenie 2.2.7 *Niech $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$.*

$\infty \pm b = \infty$: *jeśli $a = \infty$, $b \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = \infty$,*

$b > 0$, to $\infty \cdot b = \infty$: *jeśli $a = \infty$, $b > 0$, to $\lim\limits_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \infty$,*

Przykład 2.2.8 *Wykażemy, że* $\lim_{x\to\infty}[x] = \infty$.

Stosując twierdzenie o arytmetyce granic niewłaściwych dla funkcji mamy

$$\lim_{x\to\infty}(x-1) = \lim_{x\to\infty} x - \lim_{x\to\infty} 1 = \infty - 1 = \infty.$$

Zauważmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ *mamy* $[x] \le x < [x]+1$ *a więc* $x-1 < [x]$. *Następnie, stosując twierdzenie o 2-funkcjach dostajemy:*

$$\lim_{x\to\infty}[x] = \infty.$$

Również możemy naszą granicę wyznaczyć na podstawie granicy funkcji w sensie Heinego.

Niech $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie ciągiem takim, że* $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$. *Stosując twierdzenie o arytmetyce granic niewłaściwych otrzymujemy*

$$\lim_{n\to\infty}(t_n-1) = \infty - 1 = \infty.$$

Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$[t_n] \le t_n < [t_n]+1$$

a wie też zachodzi $t_n - 1 < [t_n]$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$. *Stąd stosując twierdzenie o 2-ciągach, mamy*

$$\lim_{n\to\infty}[t_n] = \infty.$$

Otrzymana wyżej granica niewłaściwa, posłuży nam do następnego przykładu.

Przykład 2.2.9 *Udowodnimy, że*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Wykażemy powyższą równość na mocy definicji Heinego. Niech $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie takim ciągiem, że* $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$. *Bez straty ogólności, możemy założyć, że wszystkie wyrazy naszego ciągu są dodatnie. W takim, razie na podstawie drugiej części z poprzedniego przykładu, mamy* $\mathrm{lm}\,[t_n] = \infty$.

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, *to dla każdego* $\epsilon > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *że dla dowolnego* $n > n_0$ *mamy*

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \epsilon.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}[t_n] = \infty$, *to jest* $m_0 \in \mathbb{N}$ *takie, że dla dowolnego* $n > m_0$ *jest* $n_0 < [t_n] \in \mathbb{N}$, *stąd mamy*

$$\left|\left(1+\frac{1}{[t_n]}\right)^{[t_n]} - e\right| < \epsilon \text{ dla każdego } n > m_0.$$

W takim razie zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{[t_n]}\right)^{[t_n]} = e.$$

Z drugiej strony jeśli $n > m+0$, *to* $n_0 < [t_n] < [t_n]+1$ *a więc też mamy*

$$\left|\left(1+\frac{1}{[t_n]+1}\right)^{[t_n]+1} - e\right| < \epsilon \text{ dla każdego } n > m_0.$$

Więc również mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{[t_n]+1}\right)^{[t_n]+1} = e.$$

Teraz zastosujemy twierdzenie o 3-ciągach w sposób następujący. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ *mamy* $0 < [t_n] \leq t_n < [t_n]+1$ *a stąd:*

$$\begin{aligned}
[t_n] \leq t_n < [t_n]+1 &\longleftrightarrow \frac{1}{[t_n]+1} < \frac{1}{t_n} \leq \frac{1}{[t_n]} \\
&\longleftrightarrow 1+\frac{1}{[t_n]+1} < 1+\frac{1}{t_n} \leq 1+\frac{1}{[t_n]} \\
&\longleftrightarrow \left(1+\frac{1}{[t_n]+1}\right)^{[t_n]} < \left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n} \leq \left(1+\frac{1}{[t_n]}\right)^{[t_n]+1}.
\end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie dla $n > m_0$ *możemy zapisać następująco:*

$$\frac{\left(1+\frac{1}{[t_n]+1}\right)^{[t_n]+1}}{1+\frac{1}{[t_n]+1}} < \left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n} \leq \left(1+\frac{1}{[t_n]}\right)^{[t_n]} \cdot \left(1+\frac{1}{[t_n]}\right).$$

Stosując twierdzenie o 3-ciągach mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{t_n}\right)^{t_n} = e.$$

Wobec dowolności wyboru ciągu $(t_n)_{\in\mathbb{N}}$ *zbieżnego do* ∞, *mamy ostatecznie*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Przekonamy się, że również liczba e jest następującą granicą

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Stosują twierdzenie o granicy funkcji złożonej mamy:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} &= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-(-x)}\right)^{-(-x)} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y}\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1}\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e.\end{aligned}$$

Możemy teraz zastosować twierdzenie o granicy funkcji złożonej do powyższego przykładu.

Przykład 2.2.10 *Na podstawie równości*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

dla funkcji $y = 1/x$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to0^+}(1+y)^{\frac{1}{y}} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e,\\ \lim_{y\to0^-}(1+y)^{\frac{1}{y}} &= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e,\end{aligned}$$

Obie granice jednostronne istnieją i są równe, więc dostajemy:

$$\lim_{y\to0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Zadania: Granice

Zadanie 26 *Proszę wyznaczyć następujące granice funkcji:*

$$a)\ \lim_{x\to1}\frac{x^5-1}{x^3-1};\quad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2^x+3}{5^x+2};\quad c)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^2 x+5};$$

Zadanie 27 *Proszę zbadać, czy istnieją granice funkcji:*

$$a)\ \lim_{x\to0} x\cdot\operatorname{sgn} x;\quad b)\ \lim_{x\to0} 2^{\frac{1}{x^5}}\quad c)\ \lim_{x\to5\pi}[3\cdot\sin x];$$

$$d)\ \lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{|x-3|};\quad e)\ \lim_{x\to1}\frac{|x-1|^3}{x^3-x^2}\quad f)\ \lim_{x\to-1}\operatorname{sgn}[x(1-x^2)].$$

Tutaj $[y]$ oznacza część całkowitą z rzeczywistego argumentu $y\in\mathbb{R}$.

Zadanie 28 *Proszę obliczyć granice funkcji:*

$$a)\ \lim_{x\to-\infty} e^{x+\sin^2 x};\quad b)\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot\cos\frac{1}{x^2};\quad c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1+\sin x}{x^2}.$$

$$d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{[x\sqrt{8}]}{[x\sqrt{2}]};\quad e)\ \lim_{x\to 0} x^3\cdot\left[\frac{1}{x}\right];\quad f)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2^{-x}+\sin x}{2^{-x}+\cos x}.$$

Zadanie 29 *Korzystając z twierdzeń o granicach niewłaściwych, proszę wyznaczyć:*

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-3}-x;\quad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right);\quad c)\ \lim_{x\to-1}\frac{3x+2}{x^2+2x+1};\quad d)\ \lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}).$$

Zadanie 30 *Korzystając z podstawowych granic wyrażeń nieoznaczonych, proszę obliczyć granice funkcji:*

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x^2};\quad b)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{2^x};\quad c)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{2^x-1}{4^{\sqrt{x}}-1};\quad d)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2x-1}.$$

Zadanie 31 *Proszę wyznaczyć wszystkie asymptoty dla podanych funkcji:*

$$a)\ \frac{x^3+x^2}{x^2-4};\quad b)\ \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}};\quad c)\ \frac{\sin x}{\pi-x};\quad d)\ \frac{\cos(\pi x)}{2^x-8};\quad e)\ \frac{\sqrt{1+x^2}}{x};\quad f)\ \frac{x^3}{(x+1)^2}.$$

2.3 Ciągłość funkcji

Definicja 2.3.1 (Ciągłość funkcji w sensie Cauchy'ego) *Niech będzie dana funkcja rzeczywista $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ oraz dany punkt $x_0 \in (a, b)$, to funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ |x - x_0| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Definicja 2.3.2 (Ciągłość funkcji w sensie Heinego) *Niech będzie dana funkcja rzeczywista $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ oraz dany punkt $x_0 \in (a, b)$, to funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy:*

$$(\forall (x_n)_{n=1}^{\infty})\Big((\forall n \in \mathbb{N}) \ x_n \in (a, b) \setminus \{x_0\} \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0\Big) \longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Twierdzenie 2.3.1 (ZF+AC) *Obie definicje ciągłości funkcji w punkcie są równoważne.*

Dowód. *Załóżmy, że definicja Cauchy'ego jest spełniona dla funkcji f w $x_0 \in (a, b)$, pokażemy, że funkcja spełnia definicję ciągłości w x_0 w sensie Heinego. Tak więc niećh będą spełnione założenia w definicji ciągłości w sensie Heinego, tzn. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem zbieżnym do x_0, niech $\epsilon > 0$, to istnieje $\delta > 0$ $|x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. To wtedy istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że jeśli $n > n_0$ to $|x_n - x_0| < \delta$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$), to dla każdego $n > n_0$ $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ co jest równoważne, że $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Pozostał nam dowód w drugą stronę, tzn definicja Cauchy'ego wynika z definicji Heinego. W tym celu posłużymy się aksjomatem wyboru AC (axiom of choice). Załóżmy, że twierdzenie jest nieprawdziwe, tzn spełniona jest definicja Heinego i jednocześnie fałszywa jest definicja ciągłości Cauchy'ego tj.

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R}) \ \ |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon. \tag{2.1}$$

Utwórzmy rodzinę zbiorów $\mathcal{F} = \{F_n \subset (a, b) : \ n \in \mathbb{N}\}$

$$F_n = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \ |x - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon\right\},$$

ϵ jest ustalone i nieależy od n, to z własności $(*)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ F_n jest niepusty $F_n \neq \emptyset$. Wybierzmy z każdego F_n po jednym elemencie $x(n)$ (mogą sie elementy x_n powtarzać), co w terminologii teorii zbiorów znaczy, że istnieje funkcja wyboru $x \in (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)^{\mathbb{N}}$ taka że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $x(n) \in F_n$. Więc z definicji naszej rodziny $\mathcal{F}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $|x(n) - x_0| <$ i jednocześnie $|f(x(n)) - f(x_0)| \geq \epsilon$, ale oczywiście $\lim_{n\to\infty} x(n) = x_0$ więc na mocy definicji Heinego $\lim_{n\to\infty} f(x(n)) = f(x_0)$. Stąd istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, że $|f(x(n_0)) - f(x_0)| < \epsilon$, tak więc w końcu mamy dla naszego $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\epsilon \leq |f(x(n)) - f(x_0)| < \epsilon, \ \ \longrightarrow \epsilon < \epsilon,$$

co prowadzi do sprzeczności, tak więc definicja Cauchy'ego ciągłości funkcji wynika z definicji ciągłości funkcji w sensie Heinego. ■

Twierdzenie 2.3.2 *Niech $f, g : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi w $x_0 \in (a, b)$. To wtedy*

1. *$f + g, f - g, fg, \alpha f$ są funkcjami ciągłymi w $x_0 \in (a, b)$*
2. *jeśli $g(x_0) \neq 0$ to $\frac{f}{g}$ jest funkcją ciągłą w $x_0 \in (a, b)$.*

Dowód. *Pokażemy ciągłość funkcji (1), stosując ciągłość w sensie Heinego. Niech $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ to $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ i $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$ (ciagłość funkcji f, g w x_0), więc*

$$\lim_{n\to\infty}(f\#g)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(x_n)\#g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\# \lim_{n\to\infty} g(x_n) = (f\#g)(x_0).$$

gdzie $\# \in \{+, -, \cdot\}$ co kończy dowód (1). Dowód (2) jest podobny, więc go pominiemy. ■

Twierdzenie 2.3.3 (O funkcji złożonej) *Jeśli mamy dane funkcje $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, $g : (c, d) \mapsto \mathbb{R}$ takie że:*

1. *$x_0 \in (a, b)$ i $(c, d) \ni y_0 = f(x_0)$*
2. *f–jest ciągła w x_0 i g–jest ciągłą funkcją w $y_0 = f(x_0)$,*

to $g \circ f$ jest funkcją ciągłą w x_0.

Dowód. *Niech $\epsilon > 0$ to istnieje $\delta > 0$ $|y - y_0| < \delta$ to $|g(y) - g(y_0)| < \epsilon$, więc istnieje $\eta > 0$, że $|x - x_0| < \eta$ to $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ tak więc z pierwszego założenia wynika że $|x - x_0| < \eta$ to $|f(x) - y_0| < \delta$, więc $|g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ takiego że $|x - x_0| < \eta$, co jest równoważne, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ takiego że $|x - x_0| < \eta$ zachodzi nierówność $|g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < \epsilon$ co jest równoważne ciągłści funkcji $g \circ f$ w punkcie $x_0 \in (a, b)$.* ■

Twierdzenie 2.3.4 (Darboux o wartości średniej) *Niech $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $[a, b]$, to*

1. *jeśli $f(a) \leq f(b)$, to dla każdego $c \in (f(a), f(b))$ istnieje $x \in (a, b)$, ze $c = f(x)$*
2. *jeśli $f(b) \leq f(a)$, to dla każdego $c \in (f(b), f(a))$ istnieje $x \in (a, b)$, ze $c = f(x)$.*

Dowód. *Udowodnimy pierwsze zdanie, dowód drugiego jest zupełnie analogiczny. Wystarczy założyć, że $f(a) < f(b)$ i niech $f(a) < c < f(b)$, to istnieje $\delta_1, \delta_2 > 0$ takie że*

$$x \in [a, a + \delta_1) \longrightarrow f(x) < c \text{ oraz } x \in (b - \delta_2, b) \longrightarrow c < f(x).$$

Oczywiście $\{x \in (a, b) : \ f(x) < c\} \neq \emptyset$. Niech $x_0 = \sup\{x \in [a, b] : \ f(x) < c\}$, oczywiście z powyższych wzorów mamy $x_0 \in [a + \delta_1, b - \delta_2]$. Udowodnimy, że $f(x_0) = c$, przypuśćmy, że $c < f(x_0)$ (przy nierówności ostrej $f(x_0) < c$ dowód jest podobny), to istnieje $\delta > 0$ takie że:

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \longrightarrow c < f(x). \tag{2.2}$$

Weźmy więc dowolne

$$x' \in (x_0 - \delta, x_0) \neq \emptyset, \text{ takie, że } f(x') < c, \tag{2.3}$$

oczywiście takie x' istnieje na mocy definicji x_0, więc mamy

$$c < f(x') \text{ oraz } f(x') < c.$$

Pierwsza nierówność wynika z (1) a druga z (2), co jest niemożliwe. Dostajemy stąd, że $f(x_0) = 0$, co kończy dowód. ■

Twierdzenie 2.3.5 (Weierstrassa o kresach) *Niech $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, będzie funkcją ciągłą, to*

1. *f jest funkcją ograniczoną na $[a,b]$,*

2. *osiąga swoje kresy, tzn. istnieje $x_1, x_2 \in [a,b]$ takie że*

$$f(x_1) = \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\} \text{ oraz } f(x_2) = \sup\{f(x) \in \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\}.$$

Dowód. *Przypuśćmy, że nasza funkcja f nie jest ograniczona na $[a,b]$, to istnieje taki ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w przedziale $[a,b]$ taki że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $|f(x_n)| > n$. Możemy założyć bez straty ogóności, że $f(x_n) > n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Istnieje podciąg zbieżny $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x_0 \in [a,b]$ (odcinek $[a,b]$ jest domknięty). Niech $\epsilon > 0$, to istnieje $\delta > 0$ takie że*

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \longrightarrow f(x) < f(x_0) + \epsilon. \tag{2.4}$$

Ale istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że $f(x_0) + \epsilon < n_0$ i istnieje $n > n_0$, że $x_{k_n} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ i $n_0 \leq k_{n_0} < k_n < f(x_{k_n})$, co jest niemożliwe wobec $(*)$, co kończy dowód p–ktu pierwszego.

Aby udowodnić własność osiągania kresów, niech $c = \sup\{f(x) \in= \mathbb{R} : \ x \in [a,b]\}$. Istnieje więc ciąg zbieżny x_n do $x_0 \in [a,b]$ taki, że $c = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = f(x_0)$. Co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Twierdzenie 2.3.6 (o funkcji odwrotnej) *Niech $f : [a,b] \mapsto [c,d]$ będzie funkcją ciągłą na $[a,b]$ i jednocześni bijekcją odcinka $[a,b]$ na $[c,d]$, to funkcja odwrotna $g : [c,d] \mapsto [a,b]$ jest też funkcją ciągłą na (c,d).*

Dowód. *Udowodnimy to twierdzenie, wykorzystując pojęcie ciągłości w sensie Heinego. Niech $y_0 \in (c,d)$ i y_n będzie dowolnym ciągiem w (c,d) zbieżnym do y_0, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Pokażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(y_0)$. Przypuśćmy, że ostatnia granica nie istnieje, więc istnieją dwa ciągi y_n i y'_n zbieżne do y_0, takie że $\lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = x \neq x' = \lim\limits_{n\to\infty} g(y'_n)$. Mamy wtedy:*

$$\begin{aligned} f(x) =& f(\lim_{n\to\infty} g(y_n)) = \lim_{n\to\infty} f(g(y_n)) = \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 = \\ &= \lim_{n\to\infty} y'_n = \lim_{n\to\infty} f(g(y'_n)) = f(\lim_{n\to\infty} g(y'_n)) = f(x'), \end{aligned}$$

ale funkcja f jest różnowartościowa na $[a,b]$ stąd $f(x) = f(x')$ to $x = x'$, co jest niemożliwe wobec $x \neq x'$. ■

Przykład 2.3.1 *Funkcje* $\arcsin x, \arccos x$ *są ciągłe na* $[-1, 1]$, $\operatorname{arctg} x$ *jest ciągła na* $\mathbb{R}$ *natomiast* $\ln x$ *jest ciągła na* $(0, \infty)$.

Przykład 2.3.2 *(*$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$*) Na podstawie teorii ciągów mamy taki fakt:*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Niech $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będzie dowolnym ciągiem dodatnim zbieżnym do zera* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, *niech* $x_n = \frac{1}{y_n}$, *więc wtedy mamy*

$$\begin{aligned} 1 = \ln e = \ln \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} &= \ln \lim_{n\to\infty} (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} \\ = \lim_{n\to\infty} \ln(1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + y_n)}{y_n}. \end{aligned}$$

Przy zamianie $\ln \lim\limits_{n\to\infty}$ *na* $\lim\limits_{n\to\infty} \ln$ *skorzystaliśmy z ciągłości funkcji logarytm* $\ln x$ *która jest funkcją odwrotną do* e^x. *Stąd mamy* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+y_n)}{y_n} = 1$ *dla każdego ciągu* $y_n > 0$ *zbieżnego do zera, więc* $\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$. *Podobnie dowodzi się lewostronnej granicy w zerze* $\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ *więc mamy*

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1.$$

Przykład 2.3.3 *(*$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$*) Aby to udowodnić skorzystamy z poprzedniego przykładu i z twierdzenia o granicy funkcji złożonej. Niech* x_n *będzie ciągiem zbieżnym do zera* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *i niech* y_n *będzie takim ciągiem takim że* $y_n = e^{x_n} - 1$, *wtedy mamy oczywiście* $x_n = \ln(1 + y_n)$ *i stąd* $x_n \to 0$ *to* $y_n \to 0$ *a więc*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\ln(1 + y_n)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = 1.$$

Twierdzenie 2.3.7 *Jeśli* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą i różnowartościową na* $[a, b]$, *to jest monotoniczna na* $[a, b]$.

Dowód. *Zastosowanie twierdzenia Darboux o wartości średniej.*

Przypuśćmy, że f *nie jest monotoniczną na* $[a, b]$. *to istnieją* $a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$ *takię że zachodzi właść* $f(x_3) \in (f(x_1), f(x_2))$ *lub do niej analogiczne.*

Wtedy istnieje $x_0 \in (x_1, x_2)$ *takie że* $f(x_3) = f(x_0)$ *stąd* $x_3 = x_0$ *więc*

$$x_0 < x_2 < x_3 = x_0 \text{ więc } x_0 < x_0$$

co jest niemożliwe. W pozostałych przypadkach dowodzi się tak samo. ■

Twierdzenie 2.3.8 (O jednostajnej ciągłości) *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na $[a,b]$, to wtedy jest jednostajnie ciągła na $[a,b]$ tzn.*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in [a,b] \quad |x - x'| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Dowód. *(Niewprost) przypuśćmy, że f jest ciągła na $[a,b]$ i jednocześnie nie jest jednostajnie ciągła. Wtedy istnieje $\epsilon > 0$, że $\forall n \in \mathbb{N}$ istnieją $x_n, x'_n \in [a,b]$ takie że $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ i $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon$. Z twierdzenia Weierstrassa istnieje takie $x_0 \in [a,b]$, że $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \lim_{n\to\infty} x'_{k_n} = x_0$ dla pewnego podciągu $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ale wtedy mamy $|f(x_{k_n}) - f(x'_{k_n})| \geq \epsilon$. Z założenia wiemy, że f jest ciągła na $[a,b]$ a więc w x_0 także, tak więc istnieje $\delta > 0$ takie że $|x - x_0| < \delta$, to $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Wiemy też, że isnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $|x_{k_n} - x_0| < \delta$ i jednocześnie $|x'_{k_n} - x_0| < \delta$, więc ostatecznie mamy:*

$$\epsilon \leq |f(x_{k_n}) - f(x'_{k_n})| \leq |f(x_{k_n}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'_{k_n})| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

co prowadzi do sprzeczności, jednocześnie kończąc dowód naszego twierdzenia. ■

Mając na uwadze poprzednie twierdzenie możemy wprowadzić pojęcie jednostajnej ciągłości na odcinku ograniczonym i domkniętym

Definicja 2.3.3 (Ciągłość jednostajna) *Mówimy, że funkcja $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ jest jednostajnie c"iągła na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in [a,b] \quad |x - x'| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Dla porównania przypomnijmy zwykłą ciągłość funkcji f na $[a,b]$:

$$\forall x \in [a,b] \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in [a,b] \quad |x - x'| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

która różni się jedynie koleńością kwantyfikatorów $\forall x \in [a,b] \exists \delta > 0$. Ta z pozoru niewielka różnica ist sprawą bardzo istotną. Mamy oczywiste twierdzenie

Twierdzenie 2.3.9 *Każda funkcja jednostajnie ciągła na dowolnym przedziale jest ciągła.*

Niestety twierdzenia nie da się odwrócić o czym mówi poniższy przykład.

Przykład 2.3.4 *Niech funkcja f będzie dana wzorem:*

$$(0,1) \ni x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}.$$

Oczywiście dla każdego $x \in (0,1)$ f jest ciągła w x ale jeśli weźmiemy dwa ciągi $x_n = \frac{1}{n+1} \in (0,1)$ i $x'_n = \frac{1}{n+2} \in (0,1)$, to oczywiście $\lim_{n\to\infty}(x_n - x'_n) = 0$ ale

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = |n + 1 - (n + 2)| = 1 > \epsilon,$$

co dowodzi, że funkcja f nie jest jednostajnie ciągła na $(0,1)$.

Definicja 2.3.4 *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem (być może niewłaściwym), niech $f_n, f_0 : I \mapsto \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcyjnym, to f_n jest zbieżny jednostajnie do g wtedy i tylko wtedy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall x \in I)\ |f_n(x) - g(x)| < \epsilon.$$

Zbieżność jednostajną oznaczamy następująco $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \rightrightarrows g$.

Twierdzenie 2.3.10 *Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \rightrightarrows g$ na odcinku ograniczonym domkniętym $[a, b]$ i f_n jest ciągła na $[a, b]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to g jest ciągła na $[a, b]$.*

Dowód. *Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną ale ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią, oraz f_n jest ciągiem funkcyjnym funkcji ciągłych na $[a, b]$ zbieżnym jednostajnie do g na $[a, b]$. Ze zbieżności jednostajnej wynika, że istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że dla każdego $x \in [a, b]$ $|f_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. Oczywiście f_n jest ciągła na $[a, b]$, niech więc $x_0 \in [a, b]$ to istnieje $\delta > 0$ że jeśli $|x - x_0| < \delta$, to $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$, więc mamy wtedy:*

$$|g(x) - g(x_0)| \leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - g(x_0)| < \epsilon,$$

dla $|x - x_0| < \delta$ co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Twierdzenie 2.3.11 *$\lim\limits_{n\to\infty} f_n \rightrightarrows g$ na odcinku I wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m > n_0)(\forall x \in I)\ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Dowód. *Wpierw pokażemy, że warunek napisany w tezie twierdzenia implikuje zbieżność jednostajną. Dla każdego $x \in I$ ciąg wartości $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Więc ciąg ten jest zbieżny do liczby $y \in \mathbb{R}$, niech $g(x) = y$ przy ustalonym $x \in I$. Funkcja $g : I \to \mathbb{R}$ jest granicą punktową ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pokażemy, że zbieżność ta jest jednostajna. W tym celu wystarczy pokazać, że zachodzi warunek:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall x \in I)\ |f_n(x) - g(x)| < 2\epsilon.$$

Z warunku występującego w tezie naszego twierdzenia biorąc dowolne $\epsilon > 0$ znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że dla dowolnych $m, n > n_0$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. Ustalmy dowolną liczbę $n > n_0$, to dla wsystkich $m > n_0$ i dowolnych $x \in I$ mamy $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. Ponieważ ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega punktowo do funkcji g, to dla dowolnego $x \in I$ istnieje $m_x > n_0$ takie że $|f_{m_x}(x) - g(x)| < \epsilon$ (dla każdego x może być inna liczba m_x ale większa od n_0). Więc dla dowolnego $x \in I$ mamy

$$|f_n(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - g(x)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Czyli ostatecznie mamy nasz warunek

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall x \in I)\ |f_n(x) - g(x)| < 2\epsilon.$$

Dowód w drugą stronę jest prostszy. Mianowicie, zakładając jednostajną zbieżność $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *do* g *i biorąc dowolną dodatnią liczbę rzeczywistą* $\epsilon > 0$ *znajdziemy* $n_0 \in \mathbb{N}$ *taką że dla dowolnego* $n > n_0$ *i dowolnego* $x \in I$ *mamy* $|f_n(x) - g(x)| < \epsilon$. *Biorąc dowolne* $m > n_0$ *mamy*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - g(x)| + |g(x) - f_m(x)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Więc ostatecznie mamy

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)(\forall x \in I)\ |f_n(x) - f_m(x)| < 2\epsilon,$$

co należało dowieść. ■

Twierdzenie 2.3.12 *Jeśli* $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$ *i istnieje* $a_n > 0$ *taki że*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$

2. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)\ \ |f_n(x)| < a_n,$

to $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \rightrightarrows f_0$ *na odcinku* I.

Dowód. *Skorzystamy z poprzedniego twierdzenia 7.4.3. Niech będzie dana* $\epsilon > 0$, *to z pierwszego założenia, istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$, *taka że dla dowolnego* $n > n_0$ $0 \leq a_n < \frac{\epsilon}{2}$. *Niech* m *będzie liczbą naturalną większą niz* n_0, *to wtedy korzystając z drugiego założenia mamy*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x)| + |f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Otrzymaliśmy więc warunek

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n > n_0)(\forall x \in I)|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon,$$

co na mocy wspomnianego twierdzenia 7.4.3 kończy nasz dowód. ■

Twierdzenie 2.3.13 *Jeśli* $f_n : I \mapsto \mathbb{R}$ *i istnieje* $a_n > 0$ *taki że*

1. $\sum a_n < \infty,$

2. $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in I)\ \ |f_n(x)| < a_n,$

to istnieje $f_0 : I \mapsto \mathbb{R}$ *taka że* $\sum f_n \rightrightarrows f_0$ *na odcinku* I.

Dowód. *Niech* $\epsilon > 0$ *będzie dowolne, to istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *że* $n, m > n_0$ *to*

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \epsilon,$$

a więc dla dowolnego $x \in I$ *mamy*

$$|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon$$

co kończy dowód. ■

Zadania: funkcje ciągłe

Zadanie 32 *Proszę wyznaczyć parametry $a, b \in \mathbb{R}$, aby funkcja:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & dla\ |x| < 2 \\ x \cdot \sqrt{x^2 - 4} & dla\ |x| \geq 2, \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

Zadanie 33 *Prosze uzasadnić, że podane równania mają jedno rozwiązanie na podanych przedziałach:*

$$a)\ 3^x + x = 3\ \ na\ (0, 1); \quad b)\ \frac{\sin x}{2} + x = 1\ \ na\ \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Zadanie 34 *Proszę podać przykład funkcji rzeczywistej $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ takiej że:*

$$\{x \in \mathbb{R} :\ f\ jest\ ciągła\ w\ punkcie\ x\} = \mathbb{Z}.$$

Zadanie 35 *Proszę podać przykład funkcji rzeczywistej $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ takiej że:*

$$\{x \in \mathbb{R} :\ f\ jest\ ciągła\ w\ punkcie\ x\} = \mathbb{N}$$

oraz

$$\{x \in \mathbb{R} :\ |f|\ jest\ ciągła\ w\ punkcie\ x\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Zadanie 36 *Niech będa dane dwie przestrzenie metryczne (X, d_X) oraz (Y, d_y). Niech $f \in Y^X$ będzie dowolną funkcją. Proszę udowdnić:*

$$(f\ jest\ ciągła\ na\ X) \longleftrightarrow (\forall U \in P(Y))(U\ jest\ otwarty,\ to\ f^{-1}[U]\ jest\ otwarty).$$

Zadanie 37 *Proszę wyznaczyć zbiór punktów ciągłości dla funkcji Riemanna zadanej wzorem następującym:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \wedge NWD(p, q) = 1 \end{cases}$$

Zadanie 38 *Proszę udowodnić, ze każdy rzeczywisty wielomian stopnia nieparzystego ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Wsk. Skorzystać z twierdzenia Darboux.*

Zadanie 39 *Proszę udowodnić, że każda funkcja ciaagła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mająca następujaca własność:*

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(f(x + y) = f(x) + f(y))$$

jest postaci $f(x) = a \cdot x$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Wsk. Udowodnić tę postać funkcji najpierw dla liczb wymiernych.

Zadanie 40 *Proszę sprawdzić jednostajną ciągłość funkcji:*

$$a)\ f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ na przedziale } (0,1); \quad b)\ f(x) = \sqrt{x} \text{ na zbiorze } [0,\infty).$$

Zadanie 41 *Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą dwiema ciągłymi funkcjami na przedziale $[a,b]$. Proszę udowodnić, że funkcja $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ dla $x \in [a,b]$ jest ciągła na tym przedziale.*

Zadanie 42 *Niech $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech będzie dany ciąg funkcyjny $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcji rzeczywistych $f_n \in \mathbb{R}^D$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zbieżny punktowo do pewnej funkcji $f \in \mathbb{R}^D$. Ponadto niech będzie dany ciąg nieujemnych liczb rezczywistych $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżnych do zera, który spełnia własność:*

$$(\forall x \in D)(\forall n \in \mathbb{N})(|f_n(x) - f(x)| \leq a_n),$$

to ciag $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na zbiorze D.

Zadanie 43 *Proszę zbadać zbieżność jednostajna następujacych ciagów funkcyjnych:*

$$a)\ f_n(x) = x^n(1 - x^n) \text{ na przedziale } [0,1]; \quad b)\ f_n(x) = \frac{1}{n \cdot x} \text{ na przedziale } (0,1].$$

2.4 Rachunek różniczkowy.

Definicja 2.4.1 (pochodnej) *Niech będzie dana funkcja $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, to mówimy że ma pochodną w $x_0 \in (a, b)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje granica właściwa:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Uwaga 2.4.1 *Zamiast powyższej granicy możemy badać istnienie pochodnej i ją obliczać wtaki sposób:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Uwaga 2.4.2 *Zamiast przedziału (a, b) w definicji pochodnej funkcji wystarczy założyć że $x_0 \in D_f$ oraz jest nie jest punktem izolowanym dziedziny funkcji f, tzn.*

$$\forall \epsilon > 0 \;\; D_f \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Uwaga 2.4.3 *Analogicznie do definicji pochodnej funkcji w punkcie x_0 możemy definiować pojęcie pochodnej jednostronnej funkcji w punkcie x_0 biorąc granicę jednostronną w x_0.*

Uwaga 2.4.4 *W definicji pochodnej funkcji f w punkcie x_0 możemy brać oczywiście granicę w sensie Cauchy'ego albo w sensie Heinego. Na przykład w sensie Cauchyego definicja pochodnej funkcji f w x_0 brzmi następująco:*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D_f \;\; |x - x_0| < \delta \longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \epsilon.$$

Jako prosty wniosek z definicji pochodnej funkcji w punkcie i pochochodnych jednostronnych funkcji w punkcie mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.4.1 *Na to by istniała pochodna funkcji f w punkcie x_0, potrzeba i wystarcza by istniały pochodne jednostronne (prawo i lewostronna) w punkcie x_0 i są sobie równe.*

Twierdzenie 2.4.2 *Jeśli funkcja ma pochodną w x_0 to jest w tym punkcie ciągła.*

Dowód. *Niech nasza funkcja jest różniczkowalna (czytaj ma pochodną) w punkcie x_0, to wówczas mamy*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) 0 = 0, \end{aligned}$$

więc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0).$$

■

Teraz podamy kilka przykładów pochodnych funkcji.

Przykład 2.4.1 *$f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ oraz $x \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Przykład 2.4.2 *$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}\right)}{x - x_0} = n x_0^{n-1}.$$

Przykład 2.4.3 *$f(x) = e^x$, $x_0 \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x_0+\Delta x} - e_0^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} e^{x_0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0}.$$

Przykład 2.4.4 *$f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \lim_{x\to x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = \cos x_0.\end{aligned}$$

W tym przykładzie korzystaliśmy z ciągłości funkcji $\sin$ *i* $\cos$.

Przykład 2.4.5 *Niech $f(x) = \ln x$ i $x_0 > 0$, to wtedy mamy:*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{x_0 \frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

Twierdzenie 2.4.3 (pochodna funkcji złożonej) *Niech będą funkcje $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, oraz $g : (c, d) \mapsto \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$ takie że:*

1. *$y_0 = f(x_0)$,*
2. *f jest różniczkowalna w x_0 i g różniczkowalna w y_0*

to wówczas funkcja złożona $h : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ $h = g \circ f$ jest również rózniczkowalna w x_0 oraz

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Dowód. *Możemy założyć, że $f(x) \neq f(x_0)$ w pewnym otoczeniu x_0, bo w przeciwnym wypadku $h(x) = h(x)$ w pewnym otoczeniu x_0. Korzystając z tego, że f jest różniczkowalna* *w x_0 mamy zagwarantowaną ciągłość funkcji f w x_0, więc jeśli $x \to x_0$ to $f(x) \to f(x_0)$ a więc mamy*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{y\to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)\end{aligned}$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Przykład 2.4.6 *Niech $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i niech $x_0 > 0$, ponadto niech $f(x) = x^\alpha$, to wtedy mamy*

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= (e^{\alpha \ln x})' = (e^y)'|_{y=\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' \\ &= e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},\end{aligned}$$

co kończy rachunek ale można równeż policzyć tę pochodną nie korzystając z powyższego twierdzenia. Wówczas mamy:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(x_0+\Delta x)} - e^{\alpha \ln x_0}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(x_0+\Delta x)} - e^{\alpha \ln x_0}}{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0)} \lim_{\Delta x\to 0} \alpha \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{y\to y_0} \frac{e^y - e^{y_0}}{y - y_0}|_{y_0=\ln x_0} \alpha \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0)}{\Delta x} \\ &= \alpha x^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Przykład 2.4.7 *Niech f będzie funkcją nieprzyjmującą wartości zerowej w otoczeniu punktu x to wtedy korzystając z twierdzenia o funkcji złożonej mamy*

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (f^{-1}(x))' = -f^{-2}(x)f'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Twierdzenie 2.4.4 (O pochodnej funkcji odwrotnej) *Niech $f : (a, b) \mapsto (b, c)$ będzie funkcją róznowartościową odwzorującą odcinek (a, b) na (c, d) taka że*

1. *jest ciągła na (a, b),*
2. *jest rózniczkowalna w $x_0 \in (a, b)$ oraz*
3. *$f'(x_0) \neq 0$,*

to wtedy funkcja odwrotna f^{-1} jest również różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0) \in (c, d)$ oraz mamy następujęcy wzór:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dowód. *Niech $y_0 = f(x_0) \in (c, d)$ dla naszego punktu $x_0 \in (a, b)$ oraz niech g będzie funkcją odwrotną do f. Z twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej g do funkcji f mamy $y \to y_0$ to $x = g(y) \to g(y_0) = x_0$, więc stąd wynika*

$$\lim_{y\to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Przykład 2.4.8 *Niech $f(x) = \ln x$ i $x_0 > 0$ to wtedy funkcja $g(y) = e^y$ jest funkcją odwrotną do f i istnieje $y_0 \in \mathbb{R}$ takie że $x_0 = g(y_0) = e^{y_0}$. Oczywiście wszystkie założenia powyższego twierdzenia są spełnione wię mamy ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej*

$$(\ln x)'|_{x=x_0} = f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{(e^y)'|_{y=y_0}} = \frac{1}{e^{y_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

Twierdzenie 2.4.5 *Niech f, g "bedą funkcjami rózniczkowalnymi w punkcie $x \in \mathbb{R}$, to wtedy:*

1. *$f + g$ jest różniczkowalna w x i $(f + g)'(x) = (f' + g')(x)$,*
2. *$\alpha \in \mathbb{R}$ to αf jest różniczkowalna w x i $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$,*
3. *fg jest różniczkowalna w x i $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,*
4. *jeśli $g(x) \neq 0$ to*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f^2(x)}.$$

Dowód. *Wpierw udowodnimy (1), mamy więc*

$$\begin{aligned}(f + g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = g'(x_0).\end{aligned}$$

Przypadek (2) jest na tyle prosty że pominiemy go, pokażemy (3) i (4).

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),\end{aligned}$$

korzystamy tu oczywiście z ciągłości funkcji g w x_0.

By udowodnić (4) wystarczy zauważyć, że $(\frac{1}{g(x)})' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ *i skorzystać z (3):*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x_0).$$

■

Definicja 2.4.2 (Maksimum lokalne) *Niech $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ i $x_0 \in (a,b)$, to mówimy, że f ma maksimum lokalne w x_0 wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\exists\delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \;\; x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta \setminus \{x_0\}) \longrightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Uwaga 2.4.5 *Podobnie definiujemy minimum lokalne funkcji f w x_0.*

Definicja 2.4.3 (Ekstremum lokalne) *f ma ekstremum lokalne w $x_0 \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy f ma maksimum lokalne w x_0 lub f ma minimum lokalne w x_0.*

Twierdzenie 2.4.6 (Fermata) *Jeśli f ma ekstremum lokalne w $x_0 \in \mathbb{R}$ i f jest różniczkowalna w x_0 to $f'(x_0) = 0$.*

Dowód. *Załóżmy, że f ma maksimum lokalne w x_0, to istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ mamy $f(x) - f(x_0) \leq 0$*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

ale z drugiej strony dla każdego $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ mamy $f(x) - f(x_0) \leq 0$ więc

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

więc

$$0 \leq f'(x_0) \leq 0 \longrightarrow f'(x_0) = 0,$$

co kończy dowód. ■

2.4.1 Twierdzenie Lagrang'ea i Cauchy'ego

Twierdzenie 2.4.7 (Rolle'a) *Niech $a, b \in \mathbb{R}$ oraz niech będzie dana funkcja $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ spełniająca warunki*

1. *f jest ciągła na $[a,b]$*
2. *f jest różniczkowalna na (a,b)*
3. *$f(a) = f(b)$*

to istnieje $c \in (a,b)$ takie, że $f'(c) = 0$.

Dowód. *Na mocy twierdzenia Weierstrassa funkcja f jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy. Więc istnieje $x_1, x_2 \in [a,b]$, że f ma minimum globalne w x_1 i maksimum globalne w x_2 (więc i lokalne także), to wtedy mamy*

$$f(x_1) \leq f(a) = f(b) \leq f(x_2).$$

Jeśli zachodzą wszędzie równości zamiast nierówności słabych to funkcja nasza jest stała na $[a,b]$ i teza twierdzenia wynika natymiast. Jeśli jedna z powyższych nierówności jest ostra (właściwa), to ten punkt $c \in \{x_1, x_2\}$ jest elementem odcinka otwartego (a,b). Wtedy pochodna istnieje w c i z tego powodu że funkcja ma ekstremum lokalne w tym punkcie wnosimy, na podstawie twierdzenia Fermata, że $f'(c) = 0$ co kończy dowód. ■

Twierdzenie 2.4.8 (Cauchy'ego) *Jeśli $f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ są funkcjami rzeczywistymi spełniające warunki:*

1. *f, g jest ciągła na $[a,b]$*
2. *f, g jest różniczkowalna na (a,b)*
3. *$g(a) \neq g(b)$ oraz $g'(c) \neq 0$ dla każdego $c \in (a,b)$*

to istnieje takie $c \in (a,b)$ że

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dowód. *Weźmy pod uwagę funkcję pomocniczą*

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

oczywiście funkcja ta jest różniczkowalna wewnątrz (a,b) i jest ciągła na $[a,b]$. Widzimy, że $h(a) = 0 = h(b)$, więc spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, istnieje stąd $c \in (a,b)$ takie że $h'(c) = 0$. Stąd mamy:

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c),$$

stąd na podstawie ostatniego założenia mamy dla pewnego $c \in (a,b)$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

■

Następujące twierdzenie jest natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia Cauchy'ego:

Twierdzenie 2.4.9 (Lagrang'ea) *Jeśli* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *jest funkcją rzeczywistą spełniającą warunki:*

1. f *jest ciągła na* $[a, b]$
2. f *jest różniczkowalna na* (a, b)

to istnieje takie $c \in (a, b)$ *że*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dowód. *wystarczy za* g *podstawić* $g(x) = x$ *i zastosować twierdzenie Cauchy'ego.* ■

Zastosowania - liczba Liouville'a

W tym podrozdziele jako zastosowanie twierdzenia Lagrange'a, podamy przykład liczby rzeczywistej, która jest liczbą przestępną. tzn. że nie jest pierwiastkiem żadnego wielomainu o współczynnikach całkowitych stopnia przynajmniej równego jeden.

Definicja 2.4.4 (Liczba Liouville'a) *Liczbę Liouville'a nazywamy liczbę rzeczywistą o następującej postaci:*

$$z = \sum \frac{1}{10^{n!}}.$$

Twierdzenie 2.4.10 *Liczba Liouville'a jest liczbą przestępną.*

Dowód. *Przypuśćmy, że* z *jest liczbą algebraiczną (nie jest przestępna), to istnieje wielomian* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *stopnia* $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *dla którego* L *jest pierwiastkiem wielomianu* f *(tzn.* $f(z) = 0$*). Na mocy twierdzenia Bezout'a wielomian ma tylko skończenie wiele pierwiastków, więc istnieje otoczenie punktu* z_0 $U = (z_0 - r, z_0 + r)$ *dla pewnego* $r > 0$ *że zachodzi relacja:*

$$(\forall x \in U)(x \neq z \longrightarrow f(x) \neq 0).$$

Pochodna wielomianu f *jest niezerowym wielomianem, więc jest taka stała* $M > 0$ *taka że* $\forall x \in U |f'(x)| < M$. *Niech* $x_0 \in U \cap \mathbb{Q}$ *będzie liczbą wymierną (różną od* z*), to stosując twierdzenie Lagrange'a do funkcji* f *na przedziale domkniętym o końcach* x_0, z *istnieje* ξ *wewnątrz tego przedziału takie że*

$$\left|\frac{f(x_0)}{x_0 - z}\right| = \left|\frac{f(x_0) - f(z)}{x_0 - z}\right| = |f'(\xi)| < M.$$

Niech $x_0 = \frac{p}{q}$ *gdzie* $p \in \mathbb{Z}$ *i* $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *oraz niech* $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$. *Wtedy mamy*

$$f(x_0) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k \left(\frac{p}{q}\right)^k = \frac{1}{q^m} \sum_{k=0}^{m} a_k p^k q^{m-k}.$$

Ponieważ $f(x_0) \neq 0$ *oraz* $\sum_{k=0}^{m} a_k p^k q^{m-k} \in \mathbb{Z}$*, to mamay* $\frac{1}{q^m} \leq |f(x_0)|$ *a więc* $\frac{1}{Mq^m} \leq |x_0 - z|$*. Tak więc istnieje mamy:*

$$(\exists C > 0)(\forall x_0 \in U \cap \mathbb{Q}) \;\; x_0 = \frac{p}{q} \longrightarrow \frac{C}{q^m} \leq \left| z - \frac{p}{q} \right|.$$

Rozważmy ciąg $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ *zbiezny do* z *określony następujaco:*

$$\forall n \in \mathbb{N}) \;\; n \neq 0 \longrightarrow z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}.$$

Wiec jest takie $n_0 \in \mathbb{N}$ *ze dla każdego* $n > n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ $z_n \in U \cap \mathbb{Q}$*. Zauważmy że dla kazdego* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *jest* $p \in \mathbb{Z}$ *takie że* $z_n = \frac{p}{10^{n!}}$*.*

Dla $n > n_0$ *mamy:*

$$\frac{C}{(10^{n!})^m} \leq |z_0 - z_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{(n+1)!+k}} \leq \frac{2}{10^{(n+1)!}}$$

a stąd mamy:

$$0 < \frac{C}{2} \leq \frac{(10^{n!})^m}{10^{(n+1)!}} = \frac{(10^m)^{n!}}{(10^{n+1})^{n!}} = \left(\frac{10^m}{10^{n+1}} \right)^{n!}.$$

Jak łatwo zauważyć, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{10^m}{10^{n+1}} \right)^{n!} = 0$*, wiec istnieje* $n_1 > n_0$ *ze dla każdego* $n > n_1$

$$\left(\frac{10^m}{10^{n+1}} \right)^{n!} < \frac{C}{2},$$

co prowadzi do sprzeczności wobec poprzedniej nierówności. ∎

2.4.2 Twierdzenie Taylora

Udowodnimy teraz twierdzenie Taylora które brzmi następująco:

Twierdzenie 2.4.11 (Taylora) *Niech dana będzie funkcja rzeczywista* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$*, która jest* $n + 1$*-krotnie różniczkwalna na* (a, b)*, niech ponadto* $x, x_0 \in (a, b)$*, to istnieje* $c \in (x_0 - |x - x_0|, x_0 + |x - x_0|)$*, że:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n+1}(x, x_0),$$

gdzie

1. $R_{n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ *jest resztą Lagrange'a,*

2. $R_{n+1}(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$ *jest resztą Cauchy'ego.*

Dowód. *Dla udowodnienia naszego twierdzenia, posłużymy się funkcją pomocniczą:*

$$F_x(t) \equiv F(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

jest ona ciągła i różniczkowalna na przedziale domkniętym $[x_0-|x-x_0|, x_0+|x-x_0|] \subset (a,b)$. *Obliczmy pochodną naszej funkcji* F *w punkcie* t

$$\begin{aligned}
F'(t) =& \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)' = f'(t) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)' \\
=& f'(t) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(f^{(k+1)}(t)(x-t)^k + f^{(k)}k(x-t)^{k-1}(-1)\right) \\
=& f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}(f^{(k+1)})(x-t)^k + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} \\
=& f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}(f^{(k+1)}(t))(x-t)^k + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - f'(t) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\
=& \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.
\end{aligned}$$

zauważmy, że $F(x) = f(x)$ *oraz* $F(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, *więc biorąc za g* $g(x) = x$ *i stosując twierdzenie Cauchy'ego istnieje takie* $c \in (x, x_0)$, *że:*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = F(x) - F(x_0) = F'(c)(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0),$$

stąd

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$$

gdzie ostatni składnik jest właśnie resztą Cauchy'ego. Biorąc w twierdzeniu Cauchy'ego $g(t) = (x-t)^{n+1}$ *mamy:*

$$\frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{0-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F(x)-F(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{F'(c)}{g'(c)} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{(n+1)(x-c)^n(-1)}$$

Więc

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

a stąd otrzymujemy

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Ostatni składnik jest $n+1$ resztą Lagrang'ea, co kończy dowód twierdzenia. ■

Przykład 2.4.9 *Wiemy, że $f(x) = e^x$ jest dowolnie wiele razy różniczkowalna i oczywiście $f^{(n)}(x) = e^x$, stąd dla $n \in \mathbb{N}$ mamy:*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k + \frac{e^c}{n!}(x-x_0)^n$$

dla pewnego $c \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$.

Przykład 2.4.10 *Niech $f(x) = \sin x$, to pokażemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. Dla $n = 1$ jest to oczywiste, z uwagi na $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Załóżmy, że dla $k \leq n$ wzór mamy prawdziwy, to wtedy*

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(n+1)} =& \left((\sin x)^{(n)}\right)' = \left(\sin(x + \frac{n\pi}{2})\right)' \\ =& \cos(x + \frac{n\pi}{2}) = \sin(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{(n+1)\pi}{2}),\end{aligned}$$

co kończy dowód naszego wzoru. Oczywiście funkcja nasza spełnia założenia twierdzenia Taylora dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$. Więc

$$f(x) = \sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(x + \frac{k\pi}{2})}{k!}(x-x_0)^k + \frac{\sin(c + \frac{k\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n$$

dla pewnego $c \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$.

Przykład 2.4.11 *Niech $f(x) = \ln(1+x)$ dla $x > -1$. Oczywiście $f'(x) = (1+x)^{-1}$, pokażemy, że $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$. Jeśli dla $k \leq n$ wzór jest udowodniony, to*

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x) =& \left(f^{(n)}(x)\right)' = ((-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n})' \\ =& (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-n-1} = (-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)},\end{aligned}$$

więc formuła na n–tą pochodną jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Więc

$$\begin{aligned}\ln(1+x) =& \ln(1+x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x_0)^{-k}}{k!}(x-x_0)^k \\ &+ \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(1+c)^{-n}}{n!}(x-x_0)^n \\ =& \ln(1+x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(1+x_0)^{-k}}{k}(x-x_0)^k + \frac{(-1)^{n-1}(1+c)^{-n}}{n}(x-x_0)^n\end{aligned}$$

dla pewnego $c \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$*. Jeśli* $x_0 = 0$ *to*

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{(-1)^{n-1}(1+c)^{-n}}{n} x^n$$

dla pewnego $c \in (x, 0) \cup (0, x)$*.*

Twierdzenie 2.4.12 *Niech* $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ *będzie* n*–krotnie różniczkowalna w otoczeniu punktu* $x_0 \in (a, b)$ *taka że*

1. n *jest liczbą parzystą większą lub równą* 2*,*
2. $f^{(n)}$ *jest ciągła w* x_0*,*
3. $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$*,*

to wtedy mamy

1. *jeśli* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *to* f *ma minimum lokalne w* x_0*,*
2. *jeśli* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *to* f *ma maksimum lokalne w* x_0*,*

Dowód. *Wystarczy udowodnić warunek (1), drugi dowodzi się analogicznie. Jeśli* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *to z waruknu (2) istnieje* $\delta > 0$*, że dla każdego* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f^{(n)}(x) > 0$*. Więc stosując twierdzenie Taylora, dla każdego* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *istnieje* $c_x \in (x, x_0)$ *(lub na odwrót) takie że*

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x - x_0)^n = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x - x_0)^n \geq 0,$$

bo n *jest parzyste, co kończy dowód (1).* ■

Twierdzenie 2.4.13 *Niech* $g_0 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *i* $f_n, g_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *będą dwoma ciągami funkcyjnymi takimi, że:*

1. *istnieje* $x_0 \in [a, b]$ *że* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ *istnieje*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n \rightrightarrows g_0$ *i* g_0, g_n *są ciągłe na* $[a, b]$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$
3. *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ $f'_n = g_n$ *na* $[a, b]$*,*

to istnieje $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *taka że*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$
2. f *jest różniczkowalna i* $f' = g_0$ *na* $[a, b]$*.*

Dowód. *Udowodnimy wpierw istnienie takiej funkcji $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. Ponieważ ciąg $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do g_0 na przedziale $[a,b]$, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$, takie że dla dowolnych $n, m > n_0$ i każdego $y \in [a,b]$ mamy $|g_n(y) - g_m(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Niech $h_{n,m}(x) = f_n(x) - f_m(x)$, korzystając z twierdzenia Lagrange'a mamy*

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| =& |h_{n,m}(x)| = |h_{n,m}(x_0) + h'_{n,m}(\xi_{nm})(x - x_0)| \\ =& |f_n(x_0) - f_m(x_0) + (f_n - f_m)'(\xi_{nm})(x - x_0)| \\ \leq& |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |(g_n - g_m)(\xi_{nm})(x - x_0)| \\ <& \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \epsilon \end{aligned}$$

dla pewnego ξ_{nm} pomiędzy x, x_0. Więc z twierdzenia Cauchy'ego ciąg f_n jest zbieżny dla każdego $x \in [a,b]$. Definiujemy f w sposób następujący: dla każdego $x \in [a,b]$ niech $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Udowodnimy teraz $1), 2)$ występujące w tezie twierdzenia. wiemy, że f_n, g_n, g_0 są jednostanie ciągłe na $[a,b]$ i ciąg g_n jest jednostajnie zbieżny do g_0 na $[a,b]$. Weźmy dowolne $\epsilon > 0$, to wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ że dla $n > n_0$ $|g_n(x) - g_0(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ oraz istnieje $\delta > 0$ że dla każdego $x' \in [a,b]$ takiego że $|x - x'| < \delta$ zachodzi $|g_n(x) - g_n(x')| < \frac{\epsilon}{2}$

$$\begin{aligned} \left|\frac{f_n(x) - f_n(x')}{x - x'} - g_0(x)\right| \leq& \left|\frac{f'_n(\xi)(x - x')}{x - x'} - g_n(x)\right| + |g_n(x) - g_0(x)| \\ =& |g_n(\xi) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_0(x)| < \epsilon, \end{aligned}$$

dla pewnego ξ pomiędzy x, x', więc

$$\left|\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} - g_0(x)\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f_n(x) - f_n(x')}{x - x'} - g_0(x)\right| \leq \epsilon.$$

Tutaj $\epsilon > 0$ jest dowolne więc dla każdego $x \in [a,b]$ $f'(x) = g_0(x)$ co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Uwaga 2.4.6 *Ciąg pochodnych g_n ciągu funkcyjnego f_n jednostajnie zbieżnego do f nie musi być zbieżny! Niech $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$ na $[0, 2\pi]$, to oczywiście $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \rightrightarrows 0$ natomiast*

$$g_n(x) = \cos nx \text{ i } \lim_{n\to\infty} g_n \text{ nie istnieje.}$$

Zadania: pochodne

Zadanie 44 *Proszę wyznaczyć parametry $a, b \in \mathbb{R}$, aby funkcja:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ ax + b & \text{dla } 1 < x, \end{cases}$$

była różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

Zadanie 45 *Proszę zróżniczkować następujace funkcje:*

$$a)\ \frac{x^2+3x+5}{x^7-1},\quad b)\ \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}},\quad c)\ x^{\sin x},\quad d)\ x^{x^x}.$$

Zadanie 46 *Proszę wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne dla zadanych funkcji:*

$$a)\ xe^{-x^2},\quad b)\ \frac{x}{1-x^3},\quad c)\ x^2e^{\frac{1}{x^2}}.$$

Zadanie 47 *Proszę udowodnić:*

$$(\forall x\in\mathbb{R})(0<x\longrightarrow\frac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\le x).$$

oraz

$$(\forall x\in\mathbb{R})(0<x\longrightarrow 1+x<e^x).$$

Zadanie 48 *Korzystajac z pierwszej części poprzedniego zadania, proszę uzasadnić, że istnieje granica następującego ciągu liczbowego:*

$$(\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\})\ \ \gamma_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1).$$

Granica ta jest tzw. stałą Eulera.

Zadanie 49 *Proszę wykazać, że poniższe tozsamości są prawdziwe:*

$$(\forall x\in(-1,1))(\ \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}\ )$$

oraz

$$(\forall x\in[-1,1])(\ \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ ).$$

Zadanie 50 *Niech $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ będą ciągłe na $[a,b]$ oraz różniczkowalne na (a,b), takie że $f(a)=g(a)$ i $f(b)=g(b)$. Prosze udowodnić. że jest $\xi\in(a,b)$ dla którego mamy $f'(\xi)=g'(\xi)$. Jest to twierdzenie o koniach wyścigowych.*

Zadanie 51 *Niech będzie dana funkcja f, która ma ciągłą pochodną na przedziale (a,b), taka że dla $n\ge 2$ ma n pierwiastków w tym przedziale. Proszę udowodnić, ze pochodna tej funkcji posiada co najmniej $n-1$ miejsc zerowych na (a,b).*

Zadanie 52 *Prosze udowodnić, że jesli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0\in\mathbb{R}$, to zachodzi nastepujaca równość:*

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

Granica po prawej stronie równości nosi nazwę **pochodnej uogólnionej**. *Proszę podać przykład funkcji nieróżniczkowalnej w punkcie x_0, dla której pochodna uogólniona istnieje x_0.*

Zadanie 53 *Proszę podać przykład ciągłej funkcji rzeczywistej* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *takiej że:*

$$\{x \in \mathbb{R} : \ f \ \textit{nie jest różniczkowalna w punkcie} \ x\} = \mathbb{N}.$$

Zadanie 54 *Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej, proszę wyznaczyć:*

$$a) \ (f^{-1})'(0), \ \textit{gdzie} \ f(x) = x + \sin x, \quad b) \ (f^{-1})'(2), \ \textit{dla} \ f(x) = e^x + e^{5x},$$

$$c) \ (f^{-1})'(4), \ \textit{gdzie} \ f(x) = x^x \wedge 1 \leq x.$$

Zadanie 55 *Proszę wyznaczyć następujące granice funkcji:*

$$a) \lim_{x \to \pi} \frac{\sin 3x}{\cos 5x}; \quad b) \lim_{x \to \infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}; \quad c) \lim_{x \to -\infty} \frac{\sin \ln(2^x + 1)}{\sin \ln(3^x + 1)}; \quad c) \lim_{x \to 1^+} x^{\ln(x-1)}.$$

wsk. Można zastosować regułe de L'Hospitala.

Zadanie 56 *Prosze wyznaczyć wzór Taylora z resztą Lagrange'a:*

a) $f(x) = \cos x, x_0 = \pi \wedge n = 6$; *b)* $f(x) = \ln(1+3x), x_0 = 0 \wedge n \in \mathbb{N}$; *c)* $f(x) = e^{2x}, x_0 = 0 \wedge n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 57 *Prosze obliczyć wartości wyrażeń z zadaną dokładnością:*

a) $\cos 0.2, \ 10^{-4}$; *b)* $e, 10^{-3}$; *c)* $\ln 0.9, 10^{-2}$; *d)* $\sqrt[3]{1.003}, 10^{-4}$.

Zadanie 58* *Proszę wyznaczyć wszystkie funkcje rzeczywiste* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dla których zachodzi równość:*

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(f'(x + y) = f'(x) \cdot f'(y)),$$

oraz pochodna f' *jest funkcją ciągłą na prostej rzeczywistej* $\mathbb{R}$*. Wsk. Zastosować funkcję pomocniczą g(x)=f'(x).*

Zadanie 59** *Niech* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *będzie funkcją Riemanna, zadana wzorem następującym:*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \wedge NWD(p, q) = 1 \end{cases}.$$

Proszę udowodnić, że funkcja f *nie jest różniczkowalna w* $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} \notin \mathbb{Q}$.

Ciekawostka. *Mozna pokazać, że zbiór punktów dla których funkcja Riemanna nie jest różniczkowalna jest gęstą* G_δ *tzn. jest przekrojem przeliczalnej ilości zbiorów gęstych i otwartych w* $\mathbb{R}$.

2.5 Funkcje wypukłe

Definicja 2.5.1 *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym odcinkiem, to $f : I \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall x, y \in I \forall t \in [0,1] \;\; f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Definicja 2.5.2 *$f : I \mapsto \mathbb{R}$ jest wklęsła na odcinku I wtedy i tylko wtedy gdy $-f$ jest wypukła na I.*

Mamy następujące dwa twierdzenia:

Twierdzenie 2.5.1 *Jeśli f jest funkcją wypukłą na odcinku I, to wtedy mamy*

1. *pochodne jednostronne istnieją w każdym punkcie odcinka I*
2. *$\forall x, y \in I \; x < y \longrightarrow f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$.*

Wniosek 2.5.1 *Funkcja wypukła jest ciągła na I.*

Twierdzenie 2.5.2 *Jeśli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie odcinka I i jest niemalejąca (pochodna) to funkcja f jest wypukła na I.*

Dowód. *Dowód tego twierdzenia przeprowadzimy niewprost. Przypuśćmy, że istnieją $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ takie że $x < y$ i*

$$f(x_t) > (1-t)f(x) + tf(y) \text{ gdzie } x_t := (1-t)x + ty,$$

to wówczas mamy

$$\begin{aligned}\frac{f(x_t) - f(x)}{x_t - x} &> \frac{(1-t)f(x) + tf(y) - f(x)}{(1-t)x + ty - x} \\ &= \frac{tf(y) - tf(x)}{ty - tx} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.\end{aligned}$$

Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned}\frac{f(y) - f(x_t)}{y - x_t} &< \frac{f(y) - ((1-t)f(x) + tf(y))}{y - ((1-t)x + ty)} \\ &= \frac{(1-t)f(y) - (1-t)f(x)}{(1-t)y - (1-t)x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.\end{aligned}$$

Stąd dla pewnego $x, y \in I$ t. że $x < y$ i pewnego $t \in [0,1]$ mamy:

$$\frac{f(x_t) - f(x)}{x_t - x} > \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(y) - f(x_t)}{y - x_t}.$$

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a istnieją ξ, η takie że $x < \xi < x_t$ i $x_t < \eta < y$ oraz zachodzą nierówności:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_t) - f(x)}{x_t - x} > \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(y) - f(x_t)}{y - x_t} = f'(\eta),$$

co jest niemożliwe wobec założenia. ■

Wniosek 2.5.2 *Jeśli funkcja f ma nieujemną drugą pochodną na odcinku I, to jest na tym odcinku wypukła.*

Przykład 2.5.1 *$f(x) = e^x$ na $\mathbb{R}$ ma dodatnią drugą pochodną $f''(x) = e^x > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ więc jest wypukła.*

Twierdzenie 2.5.3 (Nierówność Höldera) *Jeśli $(x_i)_{i=1}^n$ $(x_i)_{i=1}^n$ są ciagami liczb dodatnich oraz $p, q > 0$ takie że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to wtedy zachodzi następująca nierówność:*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Dowód. *Możemy założyć, że nie wszystkie wyrazy obydwu ciągów są zerowe, bo w przeciwnym przypadku zachodzi równość. Mamy wtedy*

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^p}{\sum_{i=1}^n x_i^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{y_i^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sum_{i=1}^n e^{r_i \frac{1}{p}} e^{s_i \frac{1}{q}} = \sum_{i=1}^n e^{\frac{1}{p} r_i + \frac{1}{q} s_i} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p} e^{r_i} + \frac{1}{q} e^{s_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p} \frac{x_i^p}{\sum_{i=1}^n x_i^p} + \frac{1}{q} \frac{y_i^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Stąd mamy tezę, co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Twierdzenie 2.5.4 (Nierówność Minkowskiego) *Jeśli $(x_i)_{i=1}^n$ $(x_i)_{i=1}^n$ są ciagami liczb dodatnich oraz $p \geq 1$, to zachodzi nierówność*

$$(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n y_i^p)^{\frac{1}{p}}$$

Dowód. *Oczywiście dla $p = 1$ nierówność jest oczywista, zauważmy, że*

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} x_i + \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{p-1} y_i,$$

niech $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *to oczywiście* $q=\frac{p}{p-1}$ *i stosując nierówność Holdera mamy*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}x_i \leq& \Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\ =&\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\Big)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\ =&\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p}\Big)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

analogicznie

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}y_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p}\Big)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

więc

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p}\Big)^{1-\frac{1}{p}}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)$$

ostatecznie mamy

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p}\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

co kończy dowód naszej nierówności. ■

Zadania: wypukłość funkcji oraz punkty przegięcia

Zadanie 60 *Proszę wyznaczyć przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia dla zadanych funkcji:*

$$a)\ \ \ln(1+x^2)\ \ \ b)\frac{1}{1-x^2},\ \ \ c)\sin x+\frac{1}{8}\sin 2x;\ \ c)e^{\operatorname{arctg} x};\ \ d)\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Zadanie 61 *Dla zadanych funkcji, proszę wyznaczyć przedziały monotonicznosci, ekstrema lokalne, przedziały wypukłości orazy p-kty przegięcia:*

$$a)\ \frac{x^3}{1-x};\quad b)\ x\sqrt{1-x^2};\quad c)\ \frac{x}{\ln x};\quad d)\ \frac{\sqrt{x}}{x-1}.$$

Zadanie 62 *Niech* $I\subset\mathbb{R}$ *będzie przedziałem otwartym oraz niech* $f:I\to\mathbb{R}$ *będzie rzeczywistą funkcja wypukłą. Proszę udowodnić:*

$$(\forall x,y,z\in I)\Big(x<y<z\longrightarrow\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(z)-f(y)}{y-z}\Big).$$

Zadanie 63 *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym oraz niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie rzeczywistą funkcją wypukłą. Proszę udowodnić:*

$$(\forall a, b \in I)\Big(a < b \longrightarrow (\exists C > 0)(\forall x, y \in [a, b])|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|\Big).$$

Wywnioskować stąd, że funkcja ta jest ciągła na przedziale I.

Wsk. Zauważyć, że istnieją $a_0, b_0 \in I$ takie że $a_0 < a < b < b_0$, dobrać $C = \max\{\left|\frac{f(a)-f(a_0)}{a-a_0}\right|, \left|\frac{f(b)-f(b_0)}{b-b_0}\right.$ i zastosować tezę z poprzedniego zadania.

Zadanie 64 *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym oraz niech $f : I \to \mathbb{R}$ będzie rzeczywistą funkcją wypukłą. Proszę udowodnić, że w każdym punkcie tego przedziału istnieją pochodne właściwe jednostronne oraz*

$$(\forall x, y \in I)\big(x < y \longrightarrow f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)\big).$$

Rozdział 3

Rachunek całkowy

3.1 Całka nieoznaczona

W rozdziale tym zajmiemy się jednym z najważniejszych pojeć Analizy Matematycznej.

Definicja 3.1.1 (Funkcja pierwotna) *Niech I będzie dowolnym przedziałem prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ oraz niech $f : I \mapsto \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją rzeczywistą. To funkcja $F : I \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną do funkcji f na odcinku I jeśli*

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

Zachodzi zasadnicze twierdzenie o istnieniu funkcji pierwotnej a mianowicie:

Twierdzenie 3.1.1 *Każda funkcja $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ciągła na I ma funkcję pierwotną.*

Dowód. *Niech $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ będzie ciągła funkcją, tak jak jest to w założeniu. Dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujemy funkcję $f_{:}[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ w sposób następujący:*

1. *definiujemy rosnący ciąg $(x_k)_{k=0}^n$ $x_k = a + \frac{b-a}{n}k \in [a, b]$ dla $k \in \{0, \dots, n\}$*
2. *definiujemy przedziały $A_1 = [x_0, x_1]$, $A_k = (x_{k-1}, x_k]$ dla $k \in \{2, ..., n\}$,*
3. *i funkcję $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(x)\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})\right)$, gdzie*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \notin A. \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\} \;\; f_n(x_k) = f(x_k),$$

oraz

$$x \in A_k \longrightarrow |f_n(x) - f_n(x_k)| \le |f_n(x_{k-1}) - f_n(x_k)| = |f(x_{k-1}) - f(x_k)|.$$

Najpierw pokażemy zbieżnośc jednostajną ciągu f_n do f. Wiemy, że funkcja f jest ciągła jednostajnie na $[a,b]$, to dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, że $|x-x'| < \delta$ to $|f(x)-f(x')| < \frac{\epsilon}{2}$. Instnieje więc $n_0 \in \mathbb{N}$, że jeśli $n > n_0$, to dla $k \in \{1,...,n\}$ $|x_k - x_{k-1}| < \delta$. Wówczas dla każdego $k \in \{1,\dots,n\}$ i każdego $x \in A_k$ mamy:

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| \leq& |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f(x)| = |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ \leq& |f_n(x_{k-1}) - f_n(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| = 2|f(x_k) - f(x_{k-1})| < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy więc, że $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

Następnie skonstruujemy ciąg funkcyjny $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, taki, że

1. $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(a)$ *istnieje oraz*
2. $n \in \mathbb{N} \longrightarrow \forall x \in [a,b] \;\; g_n'(x) = f_n(x)$

to wystarczy, by istniała $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ na $[a,b]$ taka że $g' = f$ na $[a,b]$.

Oczywiście, jeśli $x \in A_k$, to $f_n(x) = f(x_{k-1}) + \alpha_k(x - x_{k-1})$, gdzie $\alpha_k = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$. Niech

$$g_n(x) = (f(x_{k-1}) - \alpha_k x_{k-1})x + \frac{\alpha_k}{2}x^2 + c_k(n) \text{ dla } x \in A_k,$$

wtedy oczywiście $g_n'(x) = f_n(x)$ dla $x \in (x_{k-1}, x_k)$. Na to, by g_n była ciągła potrzeba i wystarcza aby g_n była ciągła w x_k dla $k \in \{1,\dots,n-1\}$. To oznacza, że dla $k \in \{1,\dots,n-1\}$ zachodzi

$$\begin{aligned}g_n(x_k) =& \lim_{x\to x_k^+} g_n(x) \equiv (f(x_{k-1}) - \alpha_k x_{k-1})x_k + \frac{\alpha_k}{2}x_k^2 + c_k(n) \\ =& \lim_{x\to x_k^+} (f(x_k) - \alpha_{k+1}x_k)x + \frac{\alpha_{k+1}}{2}x^2 + c_{k+1}(n) \\ \equiv& (f(x_{k-1}) - \alpha_k x_{k-1})x_k + \frac{\alpha_k}{2}x_k^2 + c_k(n) = (f(x_k) - \alpha_{k+1}x_k)x_k + \frac{\alpha_{k+1}}{2}x_k^2 + c_{k+1}(n).\end{aligned}$$

Więc mamy:

$$c_{k+1}(n) = c_k(n) + (f(x_{k-1}) - f(x_k) + \alpha_{k+1}x_k - \alpha_k x_{k-1})x_k + (\alpha_k - \alpha_{k+1})\frac{x_k^2}{2}$$

dla $k = 2,\dots,n-1$ a stąd mamy

$$c_{k+1}(n) = c_1(n) + \sum_{i=2}^{k}(f(x_{i-1}) - f(x_i) + \alpha_{i+1}x_i - \alpha_i x_{i-1})x_i + (\alpha_i - \alpha_{i+1})\frac{x_i^2}{2}.$$

Łatwo pokazać, że funkcja g_n jest różniczkowalna na $[a,b]$ oraz $g_n' = f_n$ na $[a,b]$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Teraz, dobierzmy ciąg $(c_1(n))_{n=1}^{\infty}$ *aby dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodziła równość* $g_n(x_0 = a) = 0$ *tzn.*

$$\begin{aligned} 0 =& g_n(x_0 = a) = (f(x_0) - \alpha_1 x_0)x_0 + \frac{\alpha_1}{2}x_0^2 + c_1(n) \\ =& (f(a) - \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a}a)a + \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a}\frac{1}{2}a^2 + c_1(n) \end{aligned}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. *Warunki* $1), 2)$ *są spełnione, więc istnieje* $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *że* $g' = f$ *na* $[a, b]$, *co kończy dowód naszego twierdzenia.* ■

Twierdzenie 3.1.2 *Jeśli* $F, G : I \mapsto \mathbb{R}$ *są funkcjami pierwotnymi do* $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *na* I, *to istnieje stała* $c \in \mathbb{R}$ *że*

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; G(x) = F(x) + c.$$

Dowód. *Załóżmy, że twierdzenie nie zachodzi dla pewnej funkcji* f *na* I, *niech* $H(x) = G(x) - F(x)$, *to istnieją* $x, x' \in I$, *że* $H(x) \neq H(x')$. *Ale* H *jest funkcją różniczkowalą na* I, *to z Twierdzenia Lagrange'a wynika, że istnieje* $\xi \in (x, x')$ *dla którego mamy:*

$$0 \neq \frac{H(x) - H(x')}{x - x'} = H'(\xi) = G'(\xi) - F'(\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0,$$

co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że H *nie jest stała na* I. *Otrzymujemy stąd*

$$\forall x \in I \;\; c = H(x) = G(x) - F(x)$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Definicja 3.1.2 *Niech* $f : I \mapsto \mathbb{R}$, *to następujący zbiór*

$$\Big\{F \in \mathbb{R}^I : \; F - \textit{funkcja pierwotna do } f\Big\}$$

nazywamy całką nieoznaczoną z funkcji f *na przedziale* I. *zbiór ten oznaczamy przez*

$$\int f(x)\,dx \textit{ lub też oznaczamy przez } \int f.$$

Na mocy poprzedniego Twierdzenia całkę z naszej funkcji f *możemy zapisać jako:*

$$\int f = \Big\{F_0 + c : c \in \mathbb{R}\Big\}$$

oraz F_0 *jest ustaloną funkcją pierwotną do* f *(na zadanym odcinku* I*).*

Mamy podstawowe twierdzenie o całce nieoznaczonej:

Twierdzenie 3.1.3 *Jeśli* $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ *mają funkcje pierwotne, to wtedy mamy*

1. $(\int f)' = f$ *na* I
2. $\int f' = f + c$ *o ile* f' *istnieje na* I
3. $\int f + g = \int f + \int g$
4. *jeśli* $\alpha \in \mathbb{R}$ *to* $\int \alpha f = \alpha \int f$.

Dowód. *Z definicji całki nieoznaczonej, mamy*

$$F \in \int \longrightarrow F' = f \text{ na odcinku } I,$$

co kończy dowód 1).

Oczywiście funkcja f *jest pierwotną funkcją do* f', *to z ostatniego twierdzenia mamy, że każdą funkcję pierwotna do* f' *otrzymamy przez dodanie pewnej stałej* $c \in \mathbb{R}$ *więc*

$$g \in \int f \longrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in I \ \ g(x) = f(x) + c \text{ stąd } g' = (f + c)' = f',$$

co kończy 2).

Niech F, G *to są funkcje pierwotne do* f, g *odpowiednio. Więc mamy:*

$$\forall x \in I \ \ (F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

więc $F + G \in \int (f + g)$ *i na odwrot jeśli* $H \in \int (f + g)$ *to wtedy* $H(x) = F(x) + (H - F)(x)$. *Musimy pokazać, że* $(H - F) \in \int g$. *Oczywiscie mamy*

$$(H - F)' = H' - F' = (f + g) - f = g,$$

co dowodzi, że istnieje stała $c \in \mathbb{R}$, *że* $G = (H - F) + c$, *więc* $H = F + G + c$, *czyli*

$$H \in \int f + \int g \equiv \left\{ F + G \in \mathbb{R}^I : F \in \int f \wedge G \in \int g \right\}.$$

Podobnie dowodzimy punkt ostatni naszego twierdzenia. ■

Przykład 3.1.1 *Przykłady całek*

1. *Jeśli* $\alpha \neq -1$ *to* $(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1})' = x^\alpha$ *wtedy* $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$,
2. $(\ln x)' = x^{-1}$ *to* $\int x^{-1} \, dx = \ln |x| + c$,
3. $(e^x)' = e^x$ *to* $\int e^x \, dx = e^x + c$,
4. $(\sin x)' = \cos x$ *to* $\int \cos x \, dx = \sin x + c$,
5. $(-\cos x)' = \sin x$ *to* $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$,

6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ *to* $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + c$,

7. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$ *to* $\int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + c$.

Twierdzenie 3.1.4 (Całkowanie przez podstawienie) *Niech* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą oraz* $g : [\alpha,\beta] \mapsto [a,b]$ *ma pochodną ciągłą na* $[\alpha,\beta]$, *to wtedy mamy*

$$\int (f \circ g)(t)g'(t)\,dt = F(x) = \int f(x)\,dx,$$

gdzie F *funkcja pierwotna do* f *na* $[a,b]$ *i* $x = g(t)$.

Dowód. *Oczywiście z naszych założeń wynika, że funkcja* $f(g(t))g'(t)$ *ma funkcję pierwotną, bo jest ciągła na* $[\alpha,\beta]$. *Niech* $H(t) \equiv (F \circ g)(t)$, *to wtedy*

$$H'(t) = (F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t),$$

więc

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(x) = \int f(x)\,dx,$$

gdzie $x = g(t)$, *co kończy dowód naszego twierdzenia.* ■

Twierdzenie 3.1.5 (Całkowanie przez części) *Jeśli* $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ *mają ciągłe pochodne na* I, *to wtedy zachodzi wzór*

$$\int f'g = fg - \int fg'.$$

Dowód. *Oczywiście całki we wzorze istnieją na mocy ciągłości pochodnych, więc mamy*

$$(fg)' = f'g + fg' \longrightarrow fg = \int (f'g + fg') = \int f'g + \int fg',$$

co po przekształceniu daje żądany wzór. ■

Przykład 3.1.2 *Chcemy obliczyć całkę*

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

Niech $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ *i* $g(x) = x^2 + 1$, *to wtedy mamy*

$$f \circ g(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ g'(x) = 2x,$$

więc na mocy twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie, mamy

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(y)\\ &= \int y^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c.\end{aligned}$$

Przykład 3.1.3 *Całkowanie przez części*

$$\int \ln x\,dx = \int (x)' \ln x\,dx = x\ln x - \int x(\ln x)'\,dx$$
$$= x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c.$$

Przykład 3.1.4 *Całkowanie przez podstawienie*

$$\int \cos^{2n+1} x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^n \cos x\,dx = \int (1-(\sin x)^2)^n (\sin x)'\,dx$$
$$= \left| y(x) = \sin x \right| = \int (1-y^2)^n\,dy = \int \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-y^2)^k\,dy$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{y^{2k+1}}{2k+1} + C = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\sin^{2k+1} x}{2k+1} + C.$$

Przykład 3.1.5 *Całki iterowane Niech $I_n = \int \cos x\,dx$, to oczywiście $I_1 = \sin x + c$ oraz $I_0 = x$. Mamy wtedy dla $n > 1$:*

$$I_n = \int \cos x \cos^{n-1} x\,dx = \int (\sin x)' \cos^{n-1} x\,dx = \sin x \cos^{n-1} x - \int \sin x (\cos^{n-1} x)'\,dx$$
$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x, dx$$
$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x \sin x\,dx$$

Więc mamy gdy $n > 1$

$$I_n = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \longrightarrow I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Niech teraz $J_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$, to $I_1 = \operatorname{arctg} x + c$. Dla $n > 1$ mamy

$$J_{n-1} = \int (x)' \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx = \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \int x (\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}})' dx$$
$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \int x(-(n-1)) \frac{2x}{(x^2+1)^n} dx$$
$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^n} dx$$
$$= \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + 2(n-1) J_{n-1} - 2(n-1) J_n,$$

ostatecznie dla $n > 1$ mamy

$$J_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}.$$

3.2 Całkowanie funkcji wymiernych

Niech

$$W(x) = \frac{f(x)}{\prod_{i=1}^{r}(x-x_i)^{n_i}\prod_{j=1}^{s}((x+a_j)^2+b_j^2)^{m_j}}$$

będzie funkcją wymierną właściwą, to z algebry wiadomo, że funkcje wymierną da się zapisać jako pewną sumę ułamków prostych:

$$W(x) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{A_{ik}}{(x-x_i)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{B_{jk}x+C_{jk}}{((x+a_j)^2+b_j^2)^k}.$$

gdzie

$$\frac{A}{(x-x_0)^n} \text{ ułamek prosty pierwszego rodzaju,}$$

$$\frac{Bx+C}{((x-a)^2+b^2)^m} \text{ ułamek prosty drugiego rodzaju.}$$

Wtedy

$$\int\frac{A}{(x-x_0)^n}dx = \begin{cases} A\ln|x-x_0|+c & \text{dla } n=1 \\ A\frac{(x-x_0)^{-n+1}}{-n+1} & \text{dla } n>1, \end{cases}$$

natomiast

$$\int\frac{Bx+C}{((x+a)^2+b^2)^n}dx = \frac{B}{2}\int\frac{2(x+a)}{((x+a)^2+b^2)}dx + (-Ba+C)\int\frac{1}{((x+a)^2+b^2)^n}dx.$$

Pierwsza całka da się policzyć stosując podstawienie $y=(x+a)^2+b^2$

$$\int\frac{2(x+a)}{((x+a)^2+b^2)^n} = \left|\begin{matrix} y=(x+a)^2+b^2 \\ dy = 2(x+a)dx\end{matrix}\right| = \int y^{-n}\,dy = \begin{cases}\ln|y| & \text{dla } n=1 \\ \frac{y^{-n+1}}{-n+1} & \text{dla } n>1\end{cases}$$
$$= \begin{cases}\ln|(x+a)^2+b^2| & \text{dla } n=1 \\ \frac{((x+a)^2+b^2)^{-n+1}}{-n+1} & \text{dla } n>1.\end{cases}$$

drugą całkę liczymy następująco:

$$\int\frac{1}{((x+a)^2+b^2)^n}dx = \frac{1}{b^{2n}}\int\frac{1}{((\frac{x+a}{b})^2+1)^n} = \left|\begin{matrix} y=\frac{x+a}{b} \\ b\,dy = dx\end{matrix}\right| = \frac{b}{b^{2n}}\int\frac{dy}{(y^2+1)^n}$$

Ostatnią całkę liczymy ze wzoru rekurencyjnego na $J_n = \int\frac{dy}{(y^2+1)^n}$.

3.3 Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Niech $R(u,v)$ będzie dowolną funkcją wymierną, naszym zadaniem jest podanie algorytmy obliczającego całkę $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

1. *Podstawienie uniwersalne (zwane również żelazne) $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ to wtedy $x = 2\operatorname{arctg} t$ stąd $dx = \frac{2\,dt}{t^2+1}$ mamy ponadto*

$$t^2 = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} - 1 \longrightarrow \frac{1}{1+t^2} = \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

Więc

$$\cos x = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{2-1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Natomiast

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2t\frac{1}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Ostatecznie

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int W(t)\,dt,$$

gdzie $W(t)$ jest funkcją wymierną.

2. *Jeśli $R(-u,v) = -R(u,v)$ to $t = \cos x$, więc $\sin x = \sqrt{1-t^2}$ oraz $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.*

3. *Jeśli $R(u,-v) = -R(u,v)$ to $t = \sin x$, więc $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ oraz $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$*

4. *Jeśli $R(-u,-v) = R(u,v)$ to $t = \operatorname{tg} x$, więc $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ oraz*

$$t^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \longrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \longrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \longrightarrow \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Można pokazać, że w przypadkach $2), 3), 4)$ całka z funkcji trygonometrycznych sprowadza się do całki z funkcji wymiernej $\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int W(t)\,dt$.

3.4 Całkowanie funkcji z niewymiernościami

Niech tak jak poprzednio $R(u,v)$ oznacza dowolną funkcję wymierną dwóch zmiennych.

1. $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx$ *to podstawmy* $x=a\sin t$*, wtedy* $dx=a\cos x\,dx$ *oraz*

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t,$$

więc ostatecznie mamy

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx=\int R(a\sin t,a\cos t)a\cos t\,dt.$$

2. $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx$ $x=a\,\mathrm{sh}\,t$*, to* $dx=a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$ *oraz*

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{sh}\,^2 t}=a\,\mathrm{ch}\,t,$$

więc ostatecznie

$$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx=\int R(a\,\mathrm{sh}\,t,a\,\mathrm{ch}\,t)a\,\mathrm{ch}\,t\,dt.$$

3. $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx$ $x=a\,\mathrm{ch}\,t$*, to* $dx=a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$ *oraz*

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\,\mathrm{ch}\,^2 t-a^2}=a\,\mathrm{sh}\,t,$$

więc ostatecznie

$$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})\,dx=\int R(a\,\mathrm{ch}\,t,a\,\mathrm{sh}\,t)a\,\mathrm{sh}\,t\,dt.$$

Można również stosować podstawienia Eulera. Niech będzie dany trójmian kwadratowy ax^2+bx+c*,* $a>0$ *i chcemy obliczyć całkę* $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$*. We"zmy podstawienie następujące* $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$ *to wtedy*

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}tx+t^2\longrightarrow(b-2\sqrt{a}t)x=t^2-c\longrightarrow x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$$

więc

$$dx=\frac{2t(b-2\sqrt{a}t)-(t^2-c)(-2\sqrt{a})}{(b-2\sqrt{a}t)^2}dt$$

ostatecznie

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=\int R(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t},\sqrt{a}(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t})+t)\frac{2t(b-2\sqrt{a}t)-(t^2-c)(-2\sqrt{a})}{(b-2\sqrt{a}t)^2}dt.$$

Jeśli $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$*, to biorąc podstawienie (Eulera)* $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_2)$ *mamy:*

$$a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_2)^2 \longrightarrow a(x-x_1) = t^2(x-x_2) \longrightarrow (a-t^2)x = ax_1 - x_2t^2$$

stąd

$$x = \frac{ax_1 - t^2x_2}{a-t^2}$$

więc

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t\left(\frac{ax_1-t^2x_2}{a-t^2} - x_2\right)$$

oraz

$$dx = \frac{-2tx_2(a-t^2) - (ax_1-t^2x_2)(-2t)}{(a-t^2)^2}dt = \frac{2at(x_1-x_2)}{(a-t^2)^2}dt$$

więc ostatecznie

$$\int R(x, \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)})\,dx = \int R\left(\frac{ax_1-t^2x_2}{a-t^2}, t\left(\frac{ax_1-t^2x_2}{a-t^2} - x_2\right)\right)\frac{2at(x_1-x_2)}{(a-t^2)^2}dt.$$

Zadania: <u>całki nieoznaczone</u>

Zadanie 65 *Proszę wyznaczyc całki nieoznaczone:*

$$a)\ \int \frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\,dx \quad b)\int \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx, \quad c)\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,dx.$$

Zadanie 66 *Stosując wzór na całkowanie przez części, proszę obliczyć:*

$$a)\ \int x^2e^{-5x}\,dx; \quad b)\ \int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx; \quad c)\ \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx; \quad d)\ \int \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x}}\,dx; \quad e)\ \int \ln(x+1)\,dx.$$

Zadanie 67 *Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie, proszę obliczyć:*

$$a)\ \int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx; \quad b)\ \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx; \quad c)\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx; \quad d)\ \int x^4\sqrt[7]{3x^5-1}\,dx; \quad e)\ \int \frac{e^x}{e^{3x}}\,dx.$$

Zadanie 68 *Proszę wyznaczyć całkę:*

$$a)\int \max\{x,x^2\}\,dx; \quad b)\ \int(|x-1|+|x+1|)\,dx.$$

Zadanie 69 *Proszę udowodnić następujacy wzór rekurencyjny:*

$$(\forall n\in\mathbb{N})\left(2<n \longrightarrow \int\frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}\,dx\right).$$

Zadanie 70 *Proszę wyznaczyć wzór rekurencyjny dla podanych całek:*

$$a) \int \ln^n x\,dx; \qquad b) \int \cos^n x\,dx.$$

Zadanie 71 *Proszę wyznaczyć całki z funkcji wymiernych:*

$$a) \int \frac{6x+3}{x62+x+4}\,dx;\ b) \int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2};\ c) \int \frac{x+2}{x(x-2)}\,dx;\ d) \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)};\ e) \int \frac{x^2}{x^2+2x}$$

Zadanie 72 *Proszę wyznaczyć całki z funkcji trygonometrycznych:*

$$a);\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx;\ b) \int \sin^4 x\,dx;\ c) \int \sin^2 2x\sin^2 x\,dx;\ d) \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx;\ e) \int \frac{dx}{1-\operatorname{tg} x};$$

$$f) \int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x+1};\ g) \frac{dx}{\cos x};\ h) \int \cos x\cos 5x\,dx\ i) \int \cos x\,\cos\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{4}\,dx.$$

Zadanie 73 *Proszę wyznaczyć całki z funkcji niewymienych:*

$$a) \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}; \quad b) \int x^3\sqrt{4+x^2}\,dx; \quad c) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

3.5 Całka Riemanna

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ będą dwiema róznymi liczbami rzeczywistymi, to podziałem odcinka $[a, b]$ nazywamy dowolny ciąg skończony rosnący $P([a, b]) = (x_0, \ldots, x_n)$ taki że

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Niech $\mathcal{P}([a, b])$ będzie zbiorem wszystkich podziałów odcinka $[a, b]$, to możemy w tym zbiorze wprowadzić porządek częściowy $\mathcal{P}([a, b], \leq)$. Niech $P, P' \in \mathcal{P}([a, b])$ to mówimy, że $P \leq P'$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja $f \in \{0, \ldots, |P'|\}^{\{0,\ldots,|P|\}}$ taka że

1. $f(0) = 0 \wedge f(|P|) = |P'|$
2. *f jest rosnąca na $\{0, \ldots, |P|\}$.*

Definicja 3.5.1 (Całka górna i dolna) *Niech $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną na $[a, b]$ i $P \in \mathcal{P}([a, b])$ będzie ustalonym podziałem, to wówczas*

1. $S(f, P) := \sum\limits_{k=1}^{|P|} \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}(x_k - x_{k-1})$ *nazywamy sumą całkową górną oraz*
2. $\overline{\int\limits_a^b} f(x)\, dx := \inf\{S(f, P) : \; P \in \mathcal{P}([a, b])\}$ *nazywamy całką górną z funkcji f na $[a, b]$,*

analogicznie

1. $s(f, P) := \sum\limits_{k=1}^{|P|} \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}(x_k - x_{k-1})$ *nazywamy sumą całkową górną oraz*
2. $\underline{\int\limits_a^b} f(x)\, dx := \sup\{s(f, P) : \; P \in \mathcal{P}([a, b])\}$ *nazywamy całką dolną z funkcji f na $[a, b]$.*

Definicja 3.5.2 (Całka Riemanna) *Mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \equiv \int_a^b f(x)\, dx.$$

Mamy następujące twierdzenie dotyczące podziałów i sum całkowych.

Twierdzenie 3.5.1 *Niech $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną na $[a, b]$, to*

1. $(\forall P, P' \in \mathcal{P}([a, b]))(\exists P_0 \in \mathcal{P}([a, b])) \;\; P \leq P_0 \wedge P' \leq P_0,$
2. $(\forall P, P' \in \mathcal{P}([a, b])) \;\; P \leq P' \longrightarrow s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P),$

3. $(\forall P \in \mathcal{P}([a,b]))\quad s(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,P)$.

Twierdzenie 3.5.2 *Niech $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, to f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}([a,b]))\quad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon.$$

Dowód. $\rightarrow$ *Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą, to z tego, że f jest calkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$ wynika, że istnieją $P_1, P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$ że*

$$\int_a^b f(x)\,dx - \epsilon < s(f,P) \leq S(f,P') < \int_a^b f(x)\,dx + \epsilon,$$

to z własności 1) i 2) poprzedniego twierdzenia, wynika, że istnieje $P_0 \in \mathcal{P}([a,b])$ że $P \leq P_0$ i $P' \leq P_0$ a stąd mamy

$$\int_a^b f(x)\,dx - \epsilon < s(f,P) \leq s(f,P_0) \leq S(f,P_0) \leq S(f,P') < \int_a^b f(x)\,dx + \epsilon,$$

a więc ostatecznie

$$S(f,P_0) - s(f,P_0) < \epsilon.$$

$\leftarrow$ *Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, to istnieje podział $P \in \mathcal{P}([a,b])$ taki że,*

$$S(f,P) - s(f,P) < \epsilon,$$

ale z własności 3) poprzedniego twierdzenia mamy

$$\left| \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \right| < |S(f,P) - s(f,P)| < \epsilon$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Twierdzenie 3.5.3 *Jeśli $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ to*

1. *f-ciągła na $[a,b]$ to jest całkowalna na $[a,b]$ w sensie Riemanna,*

2. *f-monotoniczna na $[a,b]$ to jest całkowalna na $[a,b]$ w sensie Riemanna.*

Udowodnimy twierdzenie, które daje pełną charakteryzację funkcji całkowalnych w sensie Riemanna. W tym celu, wprowadzimy dwa pojęcia, które odegrają ważną rolę w dowodzie omawianego twierdzenia.

Definicja 3.5.3 *Niech $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, niech $A \subset [a,b]$, to oscylacją funkcji f na zbiorze A nazywamy liczbę*

$$osc_f(A) := \sup\{|f(x) - f(y)| : \ \ x, y \in A\}.$$

oczywiście mamy fakt

Fakt 3.5.1 *Jeśli $A \subset B$ to $osc_f(A) \leq osc_f(B)$.*

Definicja 3.5.4 *Niech $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, niech $A \subset [a,b]$, to wahanie funkcji f w $x \in [a,b]$ nazywamy liczbę*

$$w_f(x) := \inf\{osc_f(I) : \ \ x \in I, \ \textit{przedział otwarty}\}.$$

Twierdzenie 3.5.4 *$f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall x \in [a,b] \ \ w_f(x) = 0.$$

Dowód. *Z definicji ciągłości mamy, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ i $x_0 \in [a,b]$ istnieje $\delta > 0$ że dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ więc*

$$0 \leq w_f(x_0) \leq osc_f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) < 2\epsilon$$

ale ϵ dowolne, stąd mamy ciągłość funkcji w x_0 które jest dowolne.

Dowód w drugą stronę jest równie prosty, niech $x_0 \in [a,b]$ będzie dowlne, to oczywiscie z założenia wahanie funkcji jest równe zeru $w_f(x_0) = 0$, to dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje przedział otwarty I_{x_0} zawierający x_0 taki, że $osc_f(I_{x_0}) < \epsilon$, to istnieje $\delta > 0$ taka że $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I_{x_0}$, więc z monotoniczności osc_f mamy

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq osc_f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \leq osc_f(I_{x_0}) < \epsilon,$$

co kończy dowód naszego twierdzenia. ■

Definicja 3.5.5 (Zewnętrzna miara Lebesgue'a) *Niech $A \subset \mathbb{R}$, to liczbę*

$$\lambda^*(A) := \inf\left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) : \ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n), a_n < b_n \right\}$$

nazywamy zewnętrzną miarą Lebesgue'a zbioru $A \subset \mathbb{R}$. $A \in \mathbb{L}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda^*(A) = 0$.

Fakt 3.5.2 *Miara zewnętrzna ma następujące własności*

1. $A \subset B \subset \mathbb{R}$ *to* $0 \leq \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) \leq \infty$,
2. $\lambda^*(\emptyset) = 0$
3. $\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$

4. $\lambda^*(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n)$.

Fakt 3.5.3 *Rodzina* $\mathbb{L} = \{A \in P(\mathbb{R}) :\ \lambda^*(A) = 0\}$ *jest ideałem wszystkich zbiorów miary zero, tzn.*

- $(\forall A \in P(\mathbb{R}))(\forall B \in \mathbb{L})\ A \subseteq B \longrightarrow A \in \mathbb{L}$,
- $(\forall A, B \in \mathbb{L})\ A \cup B \in \mathbb{L}$,

co więcej, jeżeli $\mathcal{J} = \{A_n :\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{L}$, *to* $\bigcup \mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathbb{L}$.

Twierdzenie 3.5.5 *Jeśli* $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *to* f *jest całkowalna w sensie Riemanna na* $[a,b]$ *wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\{x \in [a,b] :\ f - \text{ nie jest ciągła w } x\} \in \mathbb{L} = \text{ ideał zbiorów miary zero Lebesgue'a.}$$

Dowód. *"$\leftarrow$". Niech* $w_f(x)$ *będzie wahaniem funkcji* f *w puinkcie* x. *Załóżmy, że* $\{x \in [a,b] :\ w_f(x) > 0\} \in \mathbb{L}$ *jest zbiorem miary Lebesque'a zero. Niech* $\epsilon > 0$ *będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. To wtedy*

$$(\exists]ck)\ \mathcal{K} = \{I_n : n \in \mathbb{N} \wedge I_n \text{ odcinek otwarty }\}, D \subseteq \bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \wedge \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| < \frac{\epsilon}{2osc([a,b])}.$$

Niech $x \in [a,b] \setminus \bigcup \mathcal{K}$, *to istnieje* I_x *- otwarty odcinek że oscylacja na tym odcinku jest dostatecznie mała* $osc(I_x) < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. *To wtedy*

$$[a,b] \subseteq \bigcup \mathcal{K} \cup \bigcup_{x\in[a,b]\setminus\bigcup\mathcal{K}} I_x = \bigcup_{i=1}^{n} I_{n_i} \cup \bigcup_{j=1}^{m} I_{x_j}.$$

Ostatnia równość wynika ze zwartości odcinka $[a,b]$.

Łatwo pokazać, że istnieje taki podział $P \in \mathcal{P}([a,b])$ *i rodzina* $\mathcal{J}$, *że*

1. $[a,b] \subseteq \bigcup \mathcal{J}$,
2. $\mathcal{J} = \{J_k : k \in \{1, \dots |P|\}\}$ *i* $J_k = [y_{k-1}, y_k]$ *dla* $k \in \{1, \dots |P|\}$,
3. *istnieje* $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ *dla którego* $\bigcup \mathcal{J}_0 = \bigcup_{i=1}^{n} I_{n_i}$ *i* $\sum_{J\in\mathcal{J}_0} |J| \leq \sum_{i=1}^{n} |I_{n_i}|$,
4. $(\forall J \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0)(\exists j \in \{1, \dots, m\})\ J \subset I_{x_j}$.

Wtedy mamy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{|P|} osc(J_k)|J_k| &= \sum_{J\in J_0} osc(|J|)|J| + \sum_{J\notin\mathcal{J}_0} osc(J)|J| \\ &\leq osc([a,b]) \sum_{J\in\mathcal{J}_0} |J| + \sum_{J\notin J_0} \frac{\epsilon}{2(b-a)}|J| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \epsilon,\end{aligned}$$

to kończy dowód twierdzenia w jedną stronę.

"→". Niewprost, załóżmy, że $\lambda^*(\{x \in [a,b] :\ w_f(x) > 0\})$ *to wtedy*

$$\begin{aligned} 0 <&\lambda^*(\{x \in [a,b] :\ w_f(x) > 0\}) = \lambda^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in [a,b] :\ \frac{b-a}{n+1} \leq w_f(x) < \frac{b-a}{n}\}) \\ \leq& \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(\{x \in [a,b] :\ \frac{b-a}{n+1} \leq w_f(x) < \frac{b-a}{n}\}), \end{aligned}$$

to istnieje $n \in \mathbb{N}$ *że* $\delta_0 := \lambda^*(\{x \in [a,b] :\ \frac{b-a}{n+1} \leq w_f(x) < \frac{b-a}{n}\}) > 0$. *Niech* $\epsilon := \delta\frac{b-a}{n+1}$ *i niech* $P \in \mathcal{P}([a,b])$ *będzie dowolnym podziałem odcinka* $[a,b]$. *Niech*

$$L = \{k \in \{1,\dots,|P|\} :\ \ [x_{k-1}, x_k] \cap \{x : \frac{b-a}{n+1} \leq w_f(x) < \frac{b-a}{n}\} \neq \emptyset\},$$

to wtedy

$$\{x : \frac{b-a}{n+1} \leq w_f(x) < \frac{b-a}{n}\} \longrightarrow \delta_0 \leq \sum_{k\in L}(x_k - x_{k-1}).$$

Przyjmując za $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ *i* $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ *mamy*

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) =& \sum_{k=1}^{|P|} osc(I_k)\Delta x_k \geq \sum_{k\in L} osc(I_k)\Delta x_k \geq \sum_{k\in L}\frac{b-a}{n+1}\Delta x_k \\ \geq& \frac{b-a}{n+1}\delta_0 = \epsilon. \end{aligned}$$

Więc $S(f,P) - s(f,P) \geq \epsilon$ *dla dowolnego podziału* $P \in \mathcal{P}([a,b])$, *co kończy dowód naszego twierdzenia.* ■

Przykład 3.5.1 (funkcja Riemanna) *Funkcję Riemanna określamy następujęaco:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & gdy \quad x = \frac{p}{q} \wedge NWD(p,q) = 1 \\ 0 & gdy \qquad\qquad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pokażemy, że funkcja Riemanna $f(x)$ *jest co najwyżej nieciągła w punktach wymiernych. Niech* $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *będzie ustaloną liczbą niewymierną i niech* $\epsilon > 0$. *To dla każdego przedziału* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *i dla każdego* $q \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$\left\{p \in \mathbb{Z} :\ \frac{p}{q} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\right\} \text{ jest skończony.}$$

oraz $\{q \in \mathbb{N} :\ \ \frac{1}{q} \geq \epsilon\}$ *jest zbiorem skończonym, Stąd istnieje* $\delta > 0$ *taka że*

$$\left\{\frac{p}{q} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) :\ \ NWD(p,q) = 1 \wedge \frac{1}{q} \geq \epsilon\right\} = \emptyset.$$

Stąd dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{Q}$ $f(x) < \epsilon$ *a stąd dla każdego* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $0 \leq f(x) < \epsilon$*, a więc*

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| = f(x) < \epsilon,$$

co dowodzi ciągłości funkcji Riemanna w $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Stąd zbiór punktów nieciągłości jest zawarty w $\mathbb{Q}$ *a więc jest przeliczalny, więc jest zbiorem miary Lebesgue'a zero, co na podstawie poprzedniego twierdzenia dowodzi całkowalności funkcji Riemanna w zadanym przedziale domkniętym i ograniczonym.*

Pokazaliśmy że funkcja Riemanna jest całkowalna, niech teraz $P \in \mathcal{P}([a,b])$*, stąd dla każdego* $I \in P$ *mamy* $I \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$*, więc*

$$s(f,P) = \sum_{I \in P} \inf\{f(x) : \ x \in I\}|I| = \sum_{I \in P} 0|I| = 0.$$

Tak więc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f,P) : \ P \in \mathcal{P}([a,b])\} = \sup\{0 : \ P \in \mathcal{P}([a,b])\} = 0.$$

Jako ćwiczenie można udowodnić następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.5.6 *Niech* $f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *będą funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna na odcinku* $[a,b]$*, to*

1. $f+g, f-g, fg$ *są całkowane w sensie Riemanna oraz*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

2. $\alpha \in \mathbb{R}$ *to* αf *jest całkowalna w sensie Riemanna i* $\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$,

3. $|f|$ *jest całkowalna i* $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$,

4. *jeśli* $c \in (a,b)$ *to* f *jest całkowalna na* $[a,c]$ *i* $[c,b]$ *w sensie Riemanna i jednocześnie* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Zachodzi ważne twierdzenie wiążace całkę nieoznaczoną z całką oznaczoną.

Twierdzenie 3.5.7 (Leibniza-Newtona) *Jeśli $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na $[a,b]$ i F jest funkcją pierwotną do f na $[a,b]$, to*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Dowód. *Ponieważ f jest ciągła na $[a,b]$, to F - f-kcje pierwotna do f istnieje. Również z ciągłosci wynika, że f jest całkowalna w sensie Riemanna. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią, to istnieje taki podział $P \in \mathcal{P}([a,b])$, że $|S(f,P) - s(f,P)| < \epsilon$ i wtedy dla każdego $n \in \{1, \ldots, |P|\}$ i każdego $x_n^* \in [x_{n-1}, x_n]$ mamy*

$$\int\limits_a^b f - \epsilon < S(f,P) - \epsilon < s(f,P) \leq \sum_{n=1}^{|P|} f(x_n^*)\Delta x_n \leq S(f,P) < s(f,P) + \epsilon < \int\limits_a^b f + \epsilon.$$

Z drugiej strony mamy

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) =& \sum_{n=1}^{|P|}(F(x_n) - F(x_{n-1})) = \sum_{n=1}^{|P|} F'(x_n^*)\Delta x_n \\ =& \sum_{n=1}^{|P|} f(x_n^*)\Delta x_n, \end{aligned}$$

więc mamy

$$\int\limits_a^b f - \epsilon < F(b) - F(a) < \int\limits_a^b f + \epsilon$$

przy dowolnym $\epsilon > 0$, więc dostajemy równość

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a),$$

co kończy nasz dowód. ■

Przykład 3.5.2 *Chcemy obliczyć całkę $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$, wiemy że $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ jest ciągła na przedziale $[1,e]$. Wyznaczmy do f pewną funkcję pierwotną $F(x)$:*

$$\begin{aligned} F(x) =& \int f(x)\,dx = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{c} y = \ln x \\ \scriptstyle dy=(\ln x)'dx \\ \scriptstyle dy=\frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int y\,dy \\ =& \frac{y^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 x + C. \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Leibniza – Newtona mamy

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{2}\ln^2 e + C - \big(\frac{1}{2}\ln^2 1 - C\big) = \frac{1}{2}1^2 = \frac{1}{2}.$$

Przykład 3.5.3 *Obliczyć całkę* $\int_1^2 \operatorname{arctg} x^2\,dx$*. W tym celu wyznaczymy całkę nieoznaczoną z z funkcji* $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$ *(ciągłej na* $\mathbb{R}$*):*

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x^2\,dx = \int (x')\operatorname{arctg} x^2\,dx = x\operatorname{arctg} x^2 - \int x(\operatorname{arctg} x^2)'\,dx\\ =& x\operatorname{arctg} x^2 - \int x\frac{2x}{x^4+1}\,dx = x\operatorname{arctg} x^2 - 2\int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^4+1 =& (x^2)^2 + 1 = (x^2+i)(x^2-i)\\ =& (x-(\sqrt{2}+\sqrt{2}i))(x-(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i))(x-(\sqrt{2}-\sqrt{2}i))(x-(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i))\\ =& (x^2+2\sqrt{2}x+2)(x^2-2\sqrt{2}+2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^4+1}\,dx =& \int \frac{x^2}{(x^2+2\sqrt{2}x+2)(x^2-2\sqrt{2}x+2)}\,dx\\ =& \int \frac{Ax+B}{x^2+2\sqrt{2}x+2}\,dx + \int \frac{Cx+D}{x^2-2\sqrt{2}x+2}\,dx\\ =& \frac{A}{2}\int \frac{(2x+2\sqrt{2})}{x^2+2\sqrt{2}x+2} + \int \frac{B-A\sqrt{2}}{x^2+2\sqrt{2}x+2}\\ &+ \frac{C}{2}\int \frac{(2x-2\sqrt{2})}{x^2-2\sqrt{2}x+2} + \int \frac{D+C\sqrt{2}}{x^2-2\sqrt{2}x+2}\end{aligned}$$

Twierdzenie 3.5.8 *Niech* $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *takie że:*

1. f, g *są całkowalne w sensie Riemanna na odcinku* $[a, b]$*,*

2. $\forall x \in [a, b]\ \ f(x) \le g(x)$*,*

to

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dowód. *Dowód niewprost. Przypuśćmy że* $\int\limits_a^b g(x)\,dx < \int\limits_a^b f(x)\,dx$ *i niech* $\epsilon = \frac{\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx}{3} > 0$*, to istnieją podziały* $P, P' \in \mathcal{P}([a,b])$ *że*

$$\int\limits_a^b g(x)dx \leq S(g,P) < \int\limits_a^b g(x)\,dx + \epsilon < \int\limits_a^b f(x)\,dx - \epsilon < s(f,P') \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

To istnieje podział $P_0 \in \mathcal{P}([a,b])$ *taki że* $P \leq P_0$ *i* $P' \leq P_0$ *i korzystając z monotoniczności sum całkowych mamy*

$$\int\limits_a^b g(x)dx \leq S(g,P_0) \leq S(g,P) < \int\limits_a^b g(x)\,dx + \epsilon < \int\limits_a^b f(x)\,dx - \epsilon < s(f,P') \leq s(f,P_0) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

tak więc mamy:

$$\sum_{I \in P_0} \sup\{g(x) : x \in I\}|I| = S(g,P_0) < s(f,P_0) = \sum_{I \in P_0} \inf\{f(x) : x \in I\}|I|$$

stąd istnieje $I_0 \in P_0$ *że* $\sup\{g(x) : x \in I_0\} < \inf\{f(x) : x \in I_0\}$ *co przeczyłoby założeniu, że* $f(x) \leq g(x)$ *na* $[a,b]$*, co należało dowieść.* ■

Twierdzenie 3.5.9 *Niech* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$ *będzie ciągiem funkcji ciągłych jednostajnie zbieżnym do* f*, to*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Dowód. *Niech* $\epsilon > 0$ *będzie liczbą rzeczywistą dodatnią. To wówczas istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *że dla każdego* $n > n_0$ *i każdego* $x \in [a,b]$ *mamy:*

$$f(x) - \frac{\epsilon}{b-a} < f_n(x) < f(x) + \frac{\epsilon}{b-a},$$

stąd dla $n > n_0$ *mamy*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - \epsilon = \int\limits_a^b f(x) - \frac{\epsilon}{b-a}\,dx \leq \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \leq \int\limits_a^b f(x) + \frac{\epsilon}{b-a}\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \epsilon,$$

stąd mamy dla każdego $\epsilon > 0$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, że dla każdego* $n > n_0$

$$\left| \int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leq \epsilon$$

a więc $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$ ■

Jako wniosek mamy następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.5.10 (o całkowaniu szeregu potęgowego) *Jeśli* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest szeregiem potęgowym, którego promien zbieżności wynosi* R*, to dla każdego* $x \in (-R, R)$ *zachodzi wzór*

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Dowód. *Wystarczy zastosować twierdzenie o jednostajnej zbieżności szeregów potęgowych Twierdzenie 1.6.1 i powyższe twierdzenie.* ■

Twierdzenie 3.5.11 (o różniczkowaniu szeregu potęgowego) *Jeśli* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *jest szeregiem potęgowym, którego promień zbieżności wynosi* R*, to dla każdego* $t \in (-R, R)$ *zachodzi wzór*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n t^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Promień zbieżności szergu $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ *jest taki sam ja dla* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$*.*

Dowód. *Oczywiście mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|n a_n|},$$

więc promienie zbieżności obu szeregów potęgowych są takie same.

Wystarczy zastosować **Twierdzenie 2.4.12** *do* $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *i* $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ *na* $[-t, t] \subset (-R, R)$*. Ponieważ* $g_n \rightrightarrows \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ *oraz* g_n *są ciągłe na* $[-t, t] \subset (-R, R)$*. Oczywiście istnieje* $x \in [-t, t]$ *że* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *istnieje i wynosi* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *i oczywiscie* $f_n' = g_n$ *na* $[-t, t]$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$*.* ■

Przykład 3.5.4 *Obliczyć sumę szeregu liczbowego*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n}.$$

Punktem wyjscia jest szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y} \ \textit{dla}\ |y| < 1.$$

Podstawiając za $y = -t$ *mamy*

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \ \textit{dla}\ |t| < 1.$$

Niech $|x| < 1$ *to wtedy stosując twiedzenie o całkowaniu szeregów potęgowych mamy*

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

Obliczając całkę z lewej strony mamy

$$\ln|1+x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \; dla \; |x| < 1.$$

Kładąc $x = \frac{1}{2}$ *mamy*

$$\ln\frac{3}{2} = \ln|1+\frac{1}{2}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}.$$

Więc ostatecznie mamy

$$\ln\frac{2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}.$$

Przykład 3.5.5 (Liczba π***)*** *W celu wyznaczenia pewnego wzoru na liczbę* π *wykorzystamy twierdzenie o całkowaniu szeregów potęgowych.*

Rozważmy funkcję $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$*, to dla wszystkich* t *takich że* $|t| < 1$ *mamy*

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}.$$

Oczywiście promień zbieżności szeregu widniejącego powyżej wynosi 1 *a jego przedział zbieżności jest równy* $(-1, 1)$*. Niech* $x \in (-1, 1)$*, to na mocy twierdzenia* **??** *o całkowaniu szeregów mamy*

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\,dt$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Z drugiej strony mamy:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} x \Big|_0^x = arctgx.$$

Więc dla dowolnego $x \in (-1,1)$ *mamy*

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Dla $x \in (-1,1)$ *niech* $\alpha = \operatorname{arctg} x$, *więc* $x = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. *Podstawiając to do powyższej równości, otrzymujemy: dla dowolnego* $\alpha \in (-\pi/4, \pi/4)$

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{tg}^{2n+1}\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\sin^{2n+1}\alpha}{\cos^{2n+1}\alpha}.$$

Niech $\alpha = \pi/6$, *to wtedy* $\sin\pi/6 = 1/2$ *oraz* $\cos\pi/6 = \sqrt{3}/2$, *więc* $\operatorname{tg}\pi/6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Więc*

$$\pi/6 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{3^n\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

Ponieważ $6/\sqrt{3} = \sqrt{12}$ *otrzymujemy wzór na liczbę* π*:*

$$\pi = \sqrt{12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

Niech $a \in \mathbb{R}$ *takie że*

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{a}{1+\sqrt{3}},$$

to wtedy $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = 2$ *a stąd* $2 = 3 - 1 = a$. *Więc*

$$\begin{aligned}\sqrt{3} =& 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}} = 1 + \cfrac{2}{1+1+\cfrac{2}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\sqrt{3}}}} \\ =& 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\ddots}}}}}\end{aligned}$$

Ostatecznie mamy wzór na liczbę π*:*

$$\pi = 2 + 2 \cdot \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\ddots}}}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}.$$

Zadania: całki nieoznaczone

Zadanie 74 *Proszę wyznaczyc całki nieoznaczone:*

$$a) \int \frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}\,dx \quad b) \int \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx, \quad c) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\,dx.$$

Zadanie 75 *Stosując wzór na całkowanie przez części, proszę obliczyć:*

$$a) \int x^2 e^{-5x}\,dx; \quad b) \int \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx; \quad c) \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx; \quad d) \int \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x}}\,dx; \quad e) \int \ln(x+1)\,dx.$$

Zadanie 76 *Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie, proszę obliczyć:*

$$a) \int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx; \quad b) \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx; \quad c) \int \frac{\ln x}{x}\,dx; \quad d) \int x^4\sqrt[7]{3x^5-1}\,dx; \quad e) \int \frac{e^x}{e^{3x}}\,dx.$$

Zadanie 77 *Proszę wyznaczyć całkę:*

$$a) \int \max\{x, x^2\}\,dx; \quad b) \int (|x-1|+|x+1|)\,dx.$$

Zadanie 78 *Proszę udowodnić następujacy wzór rekurencyjny:*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(2 < n \longrightarrow \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}\,dx\right).$$

Zadanie 79 *Proszę wyznaczyć wzór rekurencyjny dla podanych całek:*

$$a) \int \ln^n x\,dx; \qquad b) \int \cos^n x\,dx.$$

Zadanie 80 *Proszę wyznaczyć całki z funkcji wymiernych:*

$$a) \int \frac{6x+3}{x62+x+4}\,dx; \quad b) \int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2}; \quad c) \int \frac{x+2}{x(x-2)}\,dx; \quad d) \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}; \quad e) \int \frac{x^2}{x^2+2x$$

Zadanie 81 *Proszę wyznaczyć całki z funkcji trygonometrycznych:*

$$a); \int \sin^4 x\cos^5 x\,dx; \; b) \int \sin^4 x\,dx; \; c) \int \sin^2 2x\sin^2 x\,dx; \; d) \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,dx; \; e) \int \frac{dx}{1-\operatorname{tg} x};$$

$$f) \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 1}; \; g) \frac{dx}{\cos x}; \; h) \int \cos x\cos 5x\,dx \; i) \int \cos x\,\cos\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{4}\,dx.$$

Zadanie 82 *Proszę wyznaczyć całki z funkcji niewymienych:*

$$a) \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}; \quad b) \int x^3\sqrt{4+x^2}\,dx; \quad c) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

3.6 Całki niewłaściwe

3.6.1 Całki niewłaściwe I-go rodzaju

Definicja 3.6.1 (Całka niewłaściwa I-go rodzaju) *Niech będa $a \in \mathbb{R}$. $D \subseteq \mathbb{R}$, takie że $[a, \infty) \subseteq D$. Niech będzie dana funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ taka, że dla dowolnego $T > a$ funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, T]$. To całka niewłaściwa pierwszego rodzaju z funkcji f jest zbieżna jeśli*

$$(\exists g \in \mathbb{R}) \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)\, dx = g.$$

Wtedy piszemy $\int_A^\infty f(x)\, dx = g$.

Przykład 3.6.1 *Obliczmy całkę niewłaściwą dla parametru dodatniego p i $a \in \mathbb{R}$. Niech $p \in (0, 1)$. Wtedy*

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{T\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^T \\ =\frac{1}{1-p} \lim_{T\to\infty} (T^{1-p} - a^{1-p}) = \infty - a^{1-p} = \infty.\end{aligned}$$

Jeśli $p = 1$ to wtedy mamy

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}\, dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T \frac{1}{x}\, dx = \lim_{T\to\infty} \ln|x|\Big|_a^T = \lim_{T\to\infty} (\ln|T| - \ln|a|) = \infty.$$

Wreszcie niech $p > 1$, wtedy mamy

$$\begin{aligned}\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T \frac{1}{x^p}\, dx = \lim_{T\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^T \\ =\frac{1}{1-p} \lim_{T\to\infty} (T^{1-p} - a^{1-p}) = \frac{-a^{1-p}}{1-p}.\end{aligned}$$

Na podstawie przykładu, mamy następujący Fakt.

Fakt 3.6.1 *Niech $a, p \in (0, \infty)$. Wtedy całka niewłaściwa pierwszego rodzaju*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\, dx \begin{cases} \text{jest zbieżna} & \text{dla } p > 1 \\ \text{jest rozbieżna} & \text{dla } p \in (0, 1] \end{cases}.$$

Podamy dwa kryteria zbieżności całek niewłaściwych. Przedtem udowodnimy dwa twierdzenia.

Twierdzenie 3.6.1 *Dla zadanej liczby rzeczywistej a niech będzie funkcja rzeczywista $f : D \to \mathbb{R}$, taka że $[a, \infty) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$. Wtedy mamy*

$$(\exists g \in \mathbb{R}) \lim_{x\to\infty} f(x) = g \longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x, y > M)|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Dowód. " $\rightarrow$ " *Niech* $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$, *wtedy z definicji granicy w nieskończoności mamy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x > M)|f(x) - g| < \epsilon.$$

Niech $\epsilon > 0$ *będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą, to wtedy istnieje* $M \in \mathbb{R}$ *taka że dla dowolnego* $x > M$ *mamy* $|f(x) - g| < \frac{\epsilon}{2}$. *Wybierzmy dowolne dwie liczby* x, y *większe od liczby* M. *Wtedy mamy*

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g| + |g - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dowód. $\leftarrow$ *Załóżmy, że mamy prawdziwe zdanie*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x, y > M)|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Rozważmy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zdefiniowany następująca* $a_n = f(n)$ *(bez straty ogólności, możemy założyć że* $a = 0$*). Niech* $\epsilon = 1$ *wtedy na mocy załozenie, istnieje* $M \in \mathbb{R}$ *takie, że dla dowolnych* $m, n > M$ $|a_n - a_m| = |f(m) - f(n)| < \epsilon = 1$. *Ustalmy liczbę naturalną* $m > M$, *wtedy dla dowolnego* $n > M$ *mamy*

$$a_m - 1 < a_n < a_m + 1.$$

Stąd wnioskujemy, że nasz ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ograniczony. Istnieje więc podciąg zbieżny* $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *ciągu* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Istnieje więc liczba* $g \in \mathbb{R}$ *taka że* $g = \lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to\infty} f(k_n)$.

Pokażemy że $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$. *Niech* $\epsilon > 0$ *będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy istnieje* $M \in \mathbb{R}$ *takie, że dla dowolnych* $x, y > M$ *mamy* $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$. *Ponadto, istnieje* $n_1 \in \mathbb{N}$ *takie, że dla dowolnego* $n > n_1$ *mamy* $|f(k_n) - g| = |a_{k_n} - g| < \epsilon/2$. *Ponieważ* $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$, *to istnieje istnieje* $m \in \mathbb{N}$ *takie że* $M < k_m$ *a wtedy* $|f(k_m) - g| < \epsilon/2$. *Dla dowolnego* $x > M$ *otrzymujemy*

$$|f(x) - g| \leq |f(x) - f(k_m)| + |f(k_m) - g| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Pokazaliśmy więc, że

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x > M)\ |f(x) - g| < \epsilon,$$

co oznacza że $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$. ■

Twierdzenie 3.6.2 *Mamy następującą równoważność:* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x, y > M)\ \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| < \epsilon.$$

Dowód. *Niech* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, *wówczas mamy*

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^y f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt.$$

Stosując poprzednie twierdzenie do funkcji $F(x)$ *i definicję zbieżności całki niewłaściwej I-go rodzju, otrzymujemy żadaną równoważność* ■

Twierdzenie 3.6.3 (Kryterium porównawcze) *Niech* $[a,\infty) \subseteq D_1$ *i* $[a,\infty) \subseteq D_2$ *i* $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami takimi że*

1. *istnieje* $b \geq a$, *że dla każdego* $x > b$ *zachodzi* $0 \leq f(x) \leq g(x)$,
2. *dla każdego* $T > a$ *f,g są całkowalne na* $[a,T]$.

Wtedy mamy

- *Jeżeli* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest zbieżna, to* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna,*
- *Jeżeli* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest rozbieżna, to* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest rozbieżna.*

Dowód. *Pokażemy pierwszą implikację, druga implikacja wynika z tautologii* $\models (p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$.

Niech $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *będzie całką zbieżną. Bez straty ogólności, możemy założyć, że dla dowolnego* $x \geq a$ *zachodzi* $0 \leq f(x) \leq g(x)$. *Wtedy na mocy poprzedniego twierdzenia mamy, że dla dowolnego* $\epsilon > 0$ *istnieje* $M \in \mathbb{R}$, *takie że dla każdego* $x, y > M$ *mamy* $0 \leq \int_x^y g(t)\,dt < \epsilon$. *Ponieważ funkcje* f, g *są nieujemne na* (a,∞), *to dla każdych* $x, y > M$ *mamy*

$$0 \leq \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_x^y g(t)\,dt \right| < \epsilon.$$

Więc, z poprzedniego twierdzenia wnosimy, że $\int_a^\infty f(t)\,dt$ *jest zbieżna.* ■

Twierdzenie 3.6.4 (Kryterium ilorazowe) *Niech* $[a,\infty) \subseteq D_1$ *i* $[a,\infty) \subseteq D_2$ *i* $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami takimi że*

1. *dla każdego* $T > a$ *funkcje* f, g *są całkowalne na* $[a,T]$,
2. $(\forall x \in (a,\infty))(f(x) > 0 \wedge g(x) > 0)$ *lub* $(\forall x \in (a,\infty))(f(x) < 0 \wedge g(x) < 0)$,
3. $(\exists K > 0)\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Wtedy mamy

- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna,*
- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest rozbieżna wtedy i tylko wtedy gdy* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest rozbieżna.*

Dowód. *Udowodnimy pierwszą równoważność. Druga wynika z tautologii*

$$\models (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \longleftrightarrow \neg q).$$

Bez straty ogólności, mozemy założyć, ze funkcje f, g *są dodatnie na przedziale* $[a,\infty]$. *Niech* $K = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *będzie liczbą dodatnią oraz* ϵ *taką że* $0 < \epsilon < K$. *Wówczas istnieje liczba* $M \in \mathbb{R}$ *taka że dla dowolnego* $x > M$ *zachodzi*

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < \epsilon$$

Z powyższej nierówności otrzymujemy:

$$(\forall x > M)\ (K-\epsilon)g(x) < f(x) < (K-\epsilon)g(x).$$

Stosując kryterium porównawcze do pierwszej nierówności powyższego wzoru, otrzymujemy zbieżność $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *o ile* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna. Natomiast, stosując drugą nierówność do kryterium porównawczego, otrzymujemy zbieżność* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *pod warunkiem zbieżności całki* $\int_a^\infty g(x)\,dx$. ■

3.6.2 Całki niewłaściwe II-go rodzaju

Definicja 3.6.2 (Całka niewłaściwa I-go rodzaju) *Niech będa* $a, x_0 \in \mathbb{R}$. $D \subseteq \mathbb{R}$, *takie że* $[a, x_0) \subseteq D$. *Niech będzie dana funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$ *taka, że dla dowolnego* $T \in (a, x_0)$ *funkcja* f *jest całkowalna na przedziale* $[a, x_0]$. *To całka niewłaściwa drugiego rodzaju z funkcji* f *jest zbieżna jeśli*

$$(\exists g \in \mathbb{R}) \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx = g.$$

Wtedy piszemy $\int_A^\infty f(x)\,dx = g$. *analogicznie definiujemy zbieżność* $\int_{x_0}^a f(x)\,dx$ *dla* $x_0 < a$.

Przykład 3.6.2 *Obliczmy całkę niewłaściwą dla parametru dodatniego* p *i* $a \in \mathbb{R}$. *Niech* $p \in (0,1)$. *Wtedy*

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^a \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_\epsilon^a \\ &= \frac{1}{1-p} \lim_{\epsilon\to 0^+} (a^{1-p} - \epsilon^{1-p}) = \frac{1}{1-p} a^{1-p} - \epsilon^{1-p} = -\frac{1}{1-p} a^{1-p}.\end{aligned}$$

Jeśli $p = 1$ *to wtedy mamy*

$$\int_0^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \ln|x| \Big|_\epsilon^a = \lim_{\epsilon\to 0^+} (\ln|a| - \ln|\epsilon|) = \infty.$$

Wreszcie niech $p > 1$, *wtedy mamy*

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^a \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_\epsilon^a \\ &= \frac{1}{1-p} \lim_{\epsilon\to 0^+} (a^{1-p} - \epsilon^{1-p}) = \infty.\end{aligned}$$

Na podstawie przykładu, mamy następujący Fakt.

Fakt 3.6.2 *Niech* $a, p \in (0, \infty)$. *Wtedy całka niewłaściwa pierwszego rodzaju*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \begin{cases} \text{jest zbieżna} & \text{dla } p \in (0,1) \\ \text{jest rozbieżna} & \text{dla } p \geq 1 \end{cases}.$$

Podobnie jak w przypadku całek niewłaściwych pierwszego rodzaju podamy dwa kryteria zbieżności całek niewłaściwych. Kryteria te poprzedzą dwa twierdzenia.

Twierdzenie 3.6.5 *Dla zadanej liczby rzeczywistej a niech będzie funkcja rzeczywista $f : D \to \mathbb{R}$, taka że $[a, x_0) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$. Wtedy mamy*

$$(\exists g \in \mathbb{R}) \lim_{x\to x_0} f(x) = g \longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta \in (a, x_0))(\forall x, y \in (\delta, x_0))|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Dowód. " $\to$ " *Niech $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$, wtedy z definicji granicy w x_0 mamy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))|f(x) - g| < \epsilon.$$

Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą, to wtedy istnieje $\delta > 0$ taka że dla dowolnego $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ mamy $|f(x) - g| < \frac{\epsilon}{2}$. Wybierzmy dowolne dwie liczby x, y takie, że $x, y \in (x_0 - \delta, x_0)$. Wtedy mamy

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g| + |g - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dowód. $\leftarrow$ *Załóżmy, że mamy prawdziwe zdanie*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in (x_0 - \delta, x_0))|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Rozważmy ciąg $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki że $\lim_{n\to\infty} t_n = x_0$, $t_n < x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz ciąg zdefiniowany następująca $a_n = f(t_n)$. Niech $\epsilon = 1$ wtedy na mocy założenie, istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $m, n > M$ $|a_n - a_m| = |f(t_m) - f(t_n)| < \epsilon = 1$. Ustalmy liczbę naturalną $m > M$, wtedy dla dowolnego $n > M$ mamy

$$a_m - 1 < a_n < a_m + 1.$$

Stąd wnioskujemy, że nasz ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony. Istnieje więc podciąg zbieżny $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Istnieje więc liczba $g \in \mathbb{R}$ taka że $g = \lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to\infty} f(t_{k_n})$.

Pokażemy że $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolną liczbą dodatnią. Wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in (x_0 - \delta, x_0)$ mamy $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$. Ponadto, istnieje $n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $n > n_1$ mamy $|f(t_{k_n}) - g| = |a_{k_n} - g| < \epsilon/2$. Ciąg $(t_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dąży do x_0, więc istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $t_{k_m} \in (x_0 - \delta, x_0)$. Wybierzmy dowolne $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Ponieważ $t_{k_m} \in (x_0 - \delta, x_0)$, to $|f(x) - f(k_n)| < \epsilon/2$ a stąd mamy:

$$|f(x) - g| \leq |f(x) - f(k_m)| + |f(k_m) - g| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Pokazaliśmy więc, że

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x > M)\ |f(x) - g| < \epsilon,$$

co oznacza że $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$. ■

Twierdzenie 3.6.6 *Mamy następującą równoważność:* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x, y > M)\ \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| < \epsilon.$$

Dowód. *Niech* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$*, wówczas mamy*

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^y f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt.$$

Stosując poprzednie twierdzenie do funkcji $F(x)$ *i definicję zbieżności całki niewłaściwej I-go rodzju, otrzymujemy żadaną równoważność* ■

Twierdzenie 3.6.7 (Kryterium porównawcze) *Niech* $[a, \infty) \subseteq D_1$ *i* $[a, \infty) \subseteq D_2$ *i* $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami takimi że*

1. *istnieje* $b \geq a$*, że dla każdego* $x > b$ *zachodzi* $0 \leq f(x) \leq g(x)$*,*
2. *dla każdego* $T > a$ *f,g są całkowalne na* $[a, T]$*.*

Wtedy mamy

- *Jeżeli* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest zbieżna, to* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna,*
- *Jeżeli* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest rozbieżna, to* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest rozbieżna.*

Dowód. *Pokażemy pierwszą implikację, druga implikacja wynika z tautologii* $\models (p \longrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$*.*

Niech $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *będzie całką zbieżną. Bez straty ogólności, możemy założyć, że dla dowolnego* $x \geq a$ *zachodzi* $0 \leq f(x) \leq g(x)$*. Wtedy na mocy poprzedniego twierdzenia mamy, że dla dowolnego* $\epsilon > 0$ *istnieje* $M \in \mathbb{R}$*, takie że dla każdego* $x, y > M$ *mamy* $0 \leq \int_x^y g(t)\,dt < \epsilon$*. Ponieważ funkcje* f, g *są nieujemne na* (a, ∞)*, to dla każdych* $x, y > M$ *mamy*

$$0 \leq \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_x^y g(t)\,dt\right| < \epsilon.$$

Więc, z poprzedniego twierdzenia wnosimy, że $\int_a^\infty f(t)\,dt$ *jest zbieżna.* ■

Twierdzenie 3.6.8 (Kryterium ilorazowe) *Niech* $[a, \infty) \subseteq D_1$ *i* $[a, \infty) \subseteq D_2$ *i* $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami takimi że*

1. *dla każdego* $T > a$ *funkcje* f, g *są całkowalne na* $[a, T]$*,*
2. $(\forall x \in (a, \infty))(f(x) > 0 \wedge g(x) > 0)$ *lub* $(\forall x \in (a, \infty))(f(x) < 0 \wedge g(x) < 0)$*,*
3. $(\exists K > 0)\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$*.*

Wtedy mamy

- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna,*
- $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *jest rozbieżna wtedy i tylko wtedy gdy* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest rozbieżna.*

Dowód. *Udowodnimy pierwszą równoważność. Druga wynika z tautologii*

$$\models (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow (\neg p \longleftrightarrow \neg q).$$

Bez straty ogólności, mozemy założyć, ze funkcje f, g *są dodatnie na przedziale* $[a, \infty]$*. Niech* $K = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *będzie liczbą dodatnią oraz* ϵ *taką że* $0 < \epsilon < K$*. Wówczas istnieje liczba* $M \in \mathbb{R}$ *taka że dla dowolnego* $x > M$ *zachodzi*

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \epsilon$$

Z powyższej nierówności otrzymujemy:

$$(\forall x > M)\ (K - \epsilon)g(x) < f(x) < (K - \epsilon)g(x).$$

Stosując kryterium porównawcze do pierwszej nierówności powyższego wzoru, otrzymujemy zbieżność $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *o ile* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *jest zbieżna. Natomiast, stosując drugą nierówność do kryterium porównawczego, otrzymujemy zbieżność* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *pod warunkiem zbieżności całki* $\int_a^\infty g(x)\,dx$*.* ■

Część II

Rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych

Rozdział 4

Funkcje wielu zmiennych

4.1 Przestrzenie euklidesowe

Dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n, przez $\mathbb{R}^n$ określamy n-wymiarową przestrzeń euklidesową. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ definiujemy iloczyn skalarny $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w sposób następujący:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ (x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k.$$

Z kursu algebry liniowej wiemy, że n-wymiarowa przestrzeń euklidesowa ze standowymi operacjami dodawania wektorów i mnożenia przez skalar jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych.

Z kursu algebry liniowej dowiadujemy się, że prawdziwy jest następujący fakt.

Fakt 4.1.1 *W n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej zachodzą następujące własności:*

1. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n)\ (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ (\alpha \cdot x, y) = \alpha \cdot (x, y)$,
3. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ (x, y) = (y, x)$,
4. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)\ (x, x) \geq 0$,
5. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)\ (x, x) = 0 \longleftrightarrow x = \bar{0}$.

Dla dowolnego wektora $x \in \mathbb{R}^n$ definiujemy jego długość w spsób następujący $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Fakt 4.1.2 *Zachpdzą następujące własności:*

1. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)\ \|x\| = 0 \longleftrightarrow x = \bar{0}$,
2. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)\ \|x\| \geq 0$,

3. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
4. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. *W tym celu rozważmy wielomian zmiennej reczywistej t drugiego stopnia $f(t) = (x + ty, x + ty)$, wykaż że*
   - $(\forall t \in \mathbb{R})\ f(t) \geq 0$,
   - *wywnioskuj stąd że wyróżnik f jest niedodatni $\Delta \leq 0$,*
   - *korzystając z poprzedniego faktu wyprowadź żadaną nierówność.*
5. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *(wsk. wykorzystaj nierówność z poprzedniego punktu).*

Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiujemy odległość jako $d(x, y) = \|x - y\|$.

Fakt 4.1.3 *Odległość euklidesowa ma następujące własności:*

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$,
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ d(x, y) \geq 0$,
3. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ d(x, y) = 0 \longleftrightarrow x = y$,
4. $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\ d(x, y) = d(y, x)$,
5. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n)\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definicja 4.1.1 (Przestrzeń metryczna) *Uporządkowaną parę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną, jeżeli są spełnione następujące własności:*

1. *X jest niepustym zbiorem, oraz $d : X \times X \to [0, \infty)$ jest funkcją,*
2. $(\forall x, y \in X)(d(x, y) = 0 \longleftrightarrow x = y)$,
3. $(\forall x, y \in X)(d(x, y) = d(y, x))$,
4. $(\forall x, y, z \in X)(d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y))$.

Na mocy Faktu 4.1.3 przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią metryczną.

Przykład 4.1.1 (Przestrzeń dyskretna) *Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem i dla dowolnych $x, y \in X$ niech*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & gdy\ x \neq y \\ 0 & gdy\ x = y \end{cases}.$$

Wtedy (X, d) jest przestrzenią metryczną, którą nazywamy przestrzenią dyskretną.

W przestrzeni metrycznej zbiory otwarte oraz ich dopełnienia zwane zbiorami domkniętymi zajmują szczególne miejsce.

Definicja 4.1.2 *Dla dowolnych zbiorów $A, F, U \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$ i dodatniej liczby rzeczywistej $r > 0$:*

1. *zbiór $K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x.y) < r\}$ jest kulą otwartą o środu x i promieniu r,*
2. *U jest otwarty w $\mathbb{R}^n$ jeżeli $(\forall x \in U)(\exists r > 0)\ K(x, r) \subseteq U$,*
3. *F jest domknięty w $\mathbb{R}^n$ jeżeli $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$,*
4. *$int(A) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ (\exists r > 0)\ K(x, r) \subseteq A\}$, ($int(A)$ - wnętrze zbioru A),*
5. *$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ (\forall r > 0)\ K(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$, ($\overline{A}$ - domknięcie zbioru A).*

Wprost z definicji zbioru otwartego. możemy udowodnić następujący fakt.

Fakt 4.1.4 *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wtedy*

1. *jeżeli $x \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$, to kula otwarta $K(x, r)$ jest zbiorem otwartym,*
2. *zbiory $\emptyset, \mathbb{R}^n$ są zbiorami otwartymi w $\mathbb{R}^n$,*
3. *jeżeli $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ są otwarte w $\mathbb{R}^n$ to $U \cap V$ jest otwarty w $\mathbb{R}^n$,*
4. *jeżeli $\mathcal{G} = \{U_t :\ t \in T\}$ jest rodziną zbiorów otartych, to $\bigcup \mathcal{G} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ (\exists t \in T)\ x \in U_t\}$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$.*

Korzystając z praw de Morgana nietrudno dowodzimy własności zbioru domkniętego zawarte w poniższym fakcie.

Fakt 4.1.5 *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wtedy*

1. *zbiory $\emptyset, \mathbb{R}^n$ są zbiorami domkniętymi w $\mathbb{R}^n$,*
2. *jeżeli $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ są domknięte w $\mathbb{R}^n$ to $A \cup B$ jest domknięty w $\mathbb{R}^n$,*
3. *jeżeli $\mathcal{F} = \{F_t :\ t \in T\}$ jest rodziną zbiorów domkniętych, to $\bigcap \mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ (\forall t \in T)\ x \in U_t\}$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}^n$. Wsk. skorzystaj z prawa de Morgana:*

$$\left(\bigcap \mathcal{F}\right)^c = \left(\bigcap_{t \in T} F_t\right)^c = \bigcup_{t \in T} F_t^c = \bigcup \{F_t^c :\ t \in T\}.$$

Kolejny fakt zawiera własności operacji domknięcia zbioru jak i dualnej operacji wnętrza zbioru w przestrzeni metrycznej.

Fakt 4.1.6 *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wtedy*

1. $A \subseteq \overline{A}$,
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
3. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, *czy zachodzi inkluzja w drugą stronę,*
4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
5. $int(A) \subseteq A$,
6. $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$,
7. $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$, *czy zachodzi inkluzja w drugą stronę,*
8. $int(int(A)) = int(A)$,
9. $int(A) = X \setminus \overline{X \setminus A}$, *gdzie* $X = \mathbb{R}^n$.
10. $\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \{x \in \mathbb{R}^n : \ (\exists a \in A)\ d(x,a) < \frac{1}{n}\}$.

Zadania: przestrzenie metryczne

Zadanie 83 *Wyznacz* $int(A)$, $\overline{A}$, $int(\overline{A})$, $\overline{int(A)}$ *dla*

1. $A = (0,1) \ \setminus \{\frac{1}{n+1} : \ n \in \mathbb{N}\}$,
2. $A = \mathbb{Z}$,
3. $A = \mathbb{Q}$,
4. $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
5. $A = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

Zadanie 84 *Niech* $U, V \subseteq \mathbb{R}$ *będą zbiorami otwartymi oraz* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *domkniętymi w* $\mathbb{R}$, *udowodnij że*

1. $U \times V = \{(u,v) : \ u \in U \wedge v \in V\}$ *jest zbiorem otwartym w* $\mathbb{R}^2$,
2. $A \times B = \{(a,b) : \ a \in A \wedge b \in B\}$ *jest zbiorem domkniętym w* $\mathbb{R}^2$.

Uogólnij na przypadek gdy $A, U \subseteq \mathbb{R}^m$ *i* $B, V \subseteq \mathbb{R}^n$.

4.2 Ciągi i ich granice

Pojęcie granicy ciągu liczbowego można łatwo uogólnić na przypadek wielowymiarowy. Mianowicie, niech $n \in \mathbb{N}$ będzie dodatnią liczbą naturalną to x jest ciągiem w $\mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy gdy $x \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$. Natomiast x jest ciągiem w przestrzeni metrycznej (X, d) wtedy gdy $x \in X^{\mathbb{N}}$.

Powiemy, że ciąg $x \in X^{\mathbb{N}}$ jest zbieżny w przestrzeni metrycznej (X, d) do punktu $g \in X$ wtedy gdy

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \longrightarrow d(x_n, g) < \epsilon).$$

Wtedy piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g$. Dalej, ciąg $x \in X^{\mathbb{N}}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy

$$(\exists g \in X)(\lim_{n\in\to\infty} x_n = g).$$

W szczególności, gdy mamy do czynienia z przestrzenią $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g \longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\|x_n - g\| < \epsilon).$$

Fakt 4.2.1 *Każdy ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej ma tylko jedną granicę.*

Dowód. *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, niech $x \in X^{\mathbb{N}}$ będzie zbieżnym do $g, g' \in X$. Załóżmy, że $g \neq g'$, to wtedy liczba $\epsilon = d(g, g') > 0$ jest dodatnią. Wówczas istnieją dwie liczby naturalne n_1, n_2 takie że*

- *$n > n_1$ to $d(x_n, g) < \frac{\epsilon}{2}$, oraz*
- *$n > n_2$ to $d(x_n, g') < \frac{\epsilon}{2}$.*

Niech $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, to wtedy dla dowolnego $n > n_0$ mamy

$$\epsilon = d(g, g') \leq d(g, x_n) + d(x_n, g') < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \text{ a stąd } \epsilon < \epsilon,$$

co jest niemożliwe, więc $g = g'$. ■

W przypadku ciagów w przestrzeni euklidesowej mamy następujący fakt.

Fakt 4.2.2 *Niech $m \in \mathbb{N}$ będzie dodatnią liczbą naturalną, $x \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ i $g \in \mathbb{R}^m$. Jeśli $x_n(x_n^1, \ldots, x_n^m)$, $g = (g^1, \ldots, g^m)$ to*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g \longleftrightarrow (\forall k \in \{1, \ldots, m\} \lim_{n\to\infty} x_n^k = g^k).$$

Dowód. *Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g$ i niech $k \in \{1, \ldots, m\}$ będzie dowolną ale ustaloną liczbą naturalną. Wtedy z twierdzenia o trzech ciągach na mocy nierówności*

$$0 \leq |x_n^k - g^k| \leq \|x_n - g\|$$

mamy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = g^k$.

W drugą stronę rozumowanie jest następujące. Załóżmy że dla dowolnego k *(wziętego jak wcześniej)* $\lim_{n\to\infty} x_n^k = g^k$. *Wtedy ciąg zdefiniowany następująco*

$$z_n = \max\{|x_n^k - g^k| : k \in \{1, \ldots, m\}\},$$

jest jest zbieżny do zera. Wówczas, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ *mamy*

$$\|x_n - g\| \leq \sqrt{m} \cdot z_n$$

i znów stosując twierdzenie o trzech ciągach ma miejsce żądana równość: $\lim_{n\to\infty} x_n = g$, *co kończy dowód naszego faktu.* ■
Stosując powyższy fakt mamy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \frac{n^2 + 2n - 3}{2n^2 + 7}\right) = \left(0, e, \frac{1}{2}\right).$$

Podobnie jak w przypadku ciągów liczbowych, możemy wprowadzić pojęcie podciągu ciągu $x \in X^{\mathbb{N}}$ *w przestrzeni metrycznej* (X, d). *Mianowicie, ciąg* $y \in X^{\mathbb{N}}$ *jest podciągiem ciągu* $x \in X^{\mathbb{N}}$ *w przestrzeni metrycznej* (X, d) *jeśli istnieje rosnący ciąg* $k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *o wartościach w zbiorze* $\mathbb{N}$, *taki że*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(y_n = x_{k_n}).$$

Wtedy piszemy $y \preceq x$. *Mamy następujący fakt.*

Fakt 4.2.3 *Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną,* $g \in X$ *i* $x \in X^{\mathbb{N}}$. *Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g \longleftrightarrow (\forall y \in X^{\mathbb{N}})(y \preceq x \longrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = g).$$

Dowód. *Niech* $x \in X^{\mathbb{N}}$ *będzie zbieżnym ciągiem do* $g \in X$ *i* $y \preceq x$ *bedzie jego podciągiem. Wtedy, z definicji podciągu istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych* $k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, *taki że dl każdej liczby naturalnej* $n \in \mathbb{N}$ $y_n = x_{k_n}$. *Korzystając z indukcji matematycznej mamy*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \leq k_n).$$

Dla $n = 0$ *nierówność jest oczywista. Załóżmy że mamy* $n \leq k_n$. *Wiemy że ciąg* k *jest rosnący, to wtedy* $k_n < k_{n+1}$ *a więc* $k_n + 1 \leq k_{n+1}$ *i stąd mamy*

$$n + 1 \leq k_n + 1 \leq k_{n+1}.$$

Niech $\epsilon > 0$ *będzie dodatnią liczbą rzeczywistą. Wtedy istnieje liczba naturalna* $n_0 \in \mathbb{N}$ *taka że dla dowolnego* $n > n_0$ *mamy* $d(x_n, g) < \epsilon$. *Więc na mocy powyższej uwagi mamy* $n_0 < n \leq k_n$ *a więc*

$$d(y_n, g) = d(x_{k_n}, g) < \epsilon$$

więc mamy $\lim_{n\to\infty} y_n = g$. *Dowód w drugą stronę jest oczywisty, ponieważ* x *jest swoim podciągiem* $(x \preceq x)$. ■

Powyższy fakt jest przydatny w sytuacjach, gdy chcemy wykazać, że dany ciąg nie jest zbieżny. Na przykład, biorąc ciąg $a_n = ((-1)^n, \frac{n-1}{n+1})$*, wtedy podciąg* $b_n = a_{2n}$ *jest zbieżny do* $g = (1, 1)$*, natomist podciąg* $c_n = a_{2n+1}$ *jest zbieżny do granicy* $g' = (-1, 1)$*. Ponieważ* $g \neq g'$*, więc ciąg* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nie jest zbieżny.*

W przypadku cięgów w przestrzeni euklidesowej mamy następujące twierdzenie o arytmetyce granic.

Twierdzenie 4.2.1 *Jeżeli dwa ciagi* $a, b \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ *w* m*-wymiarowej przestrzeni euklidesowej są zbieżne, to*

1. $a+b$ *i* $a-b$ *są zbieżne oraz zachodzi* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *oraz odpowiednio* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
2. *jeśli* $\alpha \in \mathbb{R}$*, to* $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić, stosując odpowiednie twierdzenie o arytmetyce granic dla ciagów liczbowych i Faktu 4.2.2.

Analogicznie jak w przypadku jednowymiarowym, w przestrzeniach euklidesowych zachodzi twierdzenie Cauchy'ego.

Twierdzenie 4.2.2 *Niech* $m \in \mathbb{N}$ *będzie dodatnią liczbą naturalną i* $x \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}$ *będzie dowolnym ciągiem. To następujące warunki są równoważne:*

1. *ciąg* x *jest zbieżny,*
2. *zachodzi warunek Cauchyego:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall, m, n \in \mathbb{N})(n_0 < m, n \longrightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon).$$

Dowód. *Udowodnimy imlikację* 1) $\to$ 2)*. Zakładając, że ciąg* x *jest zbieżny do* $g \in \mathbb{R}^m$ *weźmy dowolną dodatnią liczbę rzeczywistą* $\epsilon > 0$*. Wtedy istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, takie że dla dowolnego* $n > n_0$ *mamy* $\|x_n - g\| < \frac{\epsilon}{2}$*. Niech* m *i* n *będą dowolnymi liczbami naturalnymi, które są większe od* n_0*. Wtedy*

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - g + g - x_m\| \leq \|x_n - g\| + \|g - x_m\| < \epsilon.$$

Teraz implikacja 2) $\to$ 1)*. Niech* x *spełnia warunek Cauchy'ego, który jest treścią punktu* 2)*. Wtedy dla każdego naturalnego* k *pomiędzy* 1 *a* m *ciąg* k*-tych współrzędnych* $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *spełnia warunek Cauchy'ego jako ciąg liczbowy. Więc na mocy twierdzenia Cauchy'ego dla ciągów liczbowych istnieje liczba rzeczywista* $g^k \in \mathbb{R}$*, taka że* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = g^k$*. Ponieważ* $k \in \{1, \ldots, m\}$ *jest wybrana w sposób dowolny, to z Faktu 4.2.2, ciąg* x *jest zbieżny do* $g \in \mathbb{R}^m$*, gdzie* $g = (g^1, \ldots, g^m)$*.* ■

Warunek Cauchy'ego występujący w punkcie 2) *powyższego twierdzenia można łatwo uogólnić na przypadek przestrzeni metrycznych. Mianowicie, dla przestrzeni metrycznej* (X, d) *ciąg* $x \in X^{\mathbb{N}}$ *spełnia warunek Cauchy'ego jeżeli zachodzi warunek:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall, m, n \in \mathbb{N})(n_0 < m, n \longrightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon).$$

Przy użyciu granicy ciągu w przestrzeni metrycznej, możemy scharakteryzować pojęcie zbioru domkniętego oraz doknięcia podzbioru w przestrzeni metrycznej. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.2.3 *Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i $A \subseteq X$, to A jest domknięty w X wtedy i tylko wtedy gdy każdy ciąg zbieżny elementów ze zbioru A ma granicę w A. Ponadto, dla każdego $x \in X$ $x \in \overline{A}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ taki, że $\lim_{n\to\in\mathbb{N}} a_n = x$.*

Dowód. *Niech $A \subseteq X$ będzie zbiorem domknietym i $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ bedzie zbieżnym do pewnego $x \in X$. Załóżmy, że $x \notin A$. Ponieważ A jest domknięty, to istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $B(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$ ($A^c = X \setminus A$ jest otwarty i $x \in A^c$). Z założenia mamy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. wiec dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ $d(a_n, x) < \epsilon$ a stąd istnieje $a = a_n \in A$ takie, że $a \in B(x, \epsilon) \cap A$, sprzeczność. Teraz przedstawimy dowód w drugą stronę. Załózmy, że A nie jest domkniety ale zachodzi warunek który mówi, że każdy ciąg zbieżny elementów ze zbioru A ma granicę w A. Ponieważ A nie jest domknięty, to A^c nie jest otwarty w X. Wiec istnieje $x \in A^c$ taki, że dla każdego $\epsilon > 0$ $B(x.\epsilon) \cap A \neq \emptyset$ (nieprawda, że $B(x, \epsilon) \subseteq A^c$). Wiec dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $a_n \in A$ takie, że $a_n \in B(x.\frac{1}{n+1})$. Stąd istnieje ciąg $(a_n)_{m\in\mathbb{N}}$ elementów zbioru A, który jest zbieżny do x. Więc z założenia $x \in A$. sprzeczność.*

Drugą część dowodu (o domknieciu zbioru) pozosawiamy czytelnikowi. ■

4.3 Zwarte podzbiory przestrzeni euklidesowych

W rozdziae tym zajmiemy się zwartymi podzbiorami przestrzeni euklidesowych. Niemniej zdefiniujemy pojęcie zwartości (a dokładniej ciągowej zwartości) w przestrzeniach metrycznych a nie tylko w $\mathbb{R}^n$.

Definicja 4.3.1 (Zbiór zwarty) *Powiemy, że w przestrzeni metrycznej (X, d) zbiór $F \subseteq X$ jest zwarty (zwarty ciągowo) jeżeli każdy ciąg elementów zbioru F ma podciąg zbiezny do pewnego elementu zbioru F.*

Z analizy matematycznej 1 na mocy twierdzenia Weierstrassa wiemy, że każdy odcinek domknięty i ograniczony $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ jest zwarty. Podobnie wiemy, że każda funkcja ciągła na odcinku doknietym jest ograniczona i osiąga swoje kresy (kres górny i kres dolny wartosci funkcji na zadanym odcinku). Okazuje się, że analogiczna własność zachodzi dla dowolnych podzbiorów zwartych w przestrzeniach metrycznych (nie tylko euklidesowych). Choćby stąd, zbiory zwarte są istotnymi zbiorami rozważanymi w analizie matematycznej.

4.4 Przestrzenie zupełne

Definicja 4.4.1 (Przestrzeń metryczna zupełna) *Przestrzeń metrczna jest zupełna wtedy gdy każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.*

Przestrzeń liczb wymiernych z odległością zdefiniowaną przez wartość bezwzględną nie jest przestrzenią zupełną. Tak jest ponieważ istnieje ciąg liczb wymiernych $x \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ który jest zbieżny do $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Natomiast twierdzenie 7.4.1 mówi, że każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią metryczną zupełną. W wielu źródłach, pojawia się nazwa ciąg podstawowy, zamiast ciąg spełniający warunek Cauchy'ego.

Teraz jesteśmy gotowi przedstawić twierdzenia Banacha o punkcje stałym, które ma wiele różnych zastosowań w matematyce. W rozdziale o funkcjach uwikłanych pokażemy zastosowanie twierdzenia Banacha.

Twierdzenie 4.4.1 (Twierdzenie Banacha) *Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną. Niech $F : X \to X$ będzie odwzorowaniem zwężającym, to znaczy:*

$$(\exists c \in (0,1))(\forall x, y \in X)\ (d(F(x), F(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

to istnieje dokładnie jedno $z \in X$ takie że $F(z) = z$.

Dowód. *Niech $x \in X$ będzie dowolnym punktem naszej przestrzeni. Definiujemy ciąg $y \in X^{\mathbb{N}}$ następująco:*

$$y_0 = x \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(y_{n+1} = F(y_n)).$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq c \cdot d(F^{n-1}(x), F^n(x)) \leq \ldots \leq c^n \cdot d(x, F(x)).$$

Pokażemy, że ten ciąg jest podstawowy. Wpierw zauważmy, że jeśli m, n są liczbami naturalnymi $m < n$, to wtedy

$$\begin{aligned} d(y_m, y_n) \leq & d(y_m, y_{m+1}) + d(y_{m+1}, y_{m+2}) + \ldots + d(y_{n-1}, y_n) \\ = & d(F^m(x), F^{m+1}(x) + d(F^{m+1}(x), F^{m+2}(x)) + \ldots d(F^{n-1}(x), F^n(x)) \\ \leq & c^m d(x, F(x)) + c^{m+1} d(x, F(x)) + \ldots + c^{n-1} d(x, F(x)) \\ \leq & d(x, F(x)) \sum_{k=0}^{\infty} c^{m+k} = d(x, F(x)) \cdot \frac{c^m}{1-c}. \end{aligned}$$

Ponieważ $c \in (0,1)$, to $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$ a stąd dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ jeśli $n_0 < m, n$ to wtedy $d(y_m, y_n) < \epsilon$. Stąd y jest ciągiem podstawowym w przestrzeni X a więc zbieżny, bo X jest przestrzenią zupełną. Istnieje więc $z \in X$ takie że $z = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} F^n(x)$. Pokażemy, że $F(z) = z$.

Dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że dla dowolnego $n > n_0$ zachodzi $d(F^n(x), z) < \frac{\epsilon}{2}$. Wybierzmy liczbę naturalną n, taką, że $n - 1 > n_0$, to wtedy

$$d(F(z), z) \leq d(F(z), F^n(x)) + d(F^n(x), z) \leq c \cdot d(z, F^{n-1}(x)) + d(F^n(x), z) < \epsilon.$$

Ponieważ powyższa nierówność zachodzi dla każdego $\epsilon > 0$, więc z jest punktem stałym odwzorowania F, czyli mamy $F(z) = z$. Pokażemy jedyność punktu stałego. Niech $z, z' \in X$ będą punktami stałymi, to wtedy

$$d(z, z') = d(F(z), F(z')) \leq c \cdot d(z, z') \longrightarrow d(z, z') = 0 \longrightarrow z = z'.$$

Pierwsza implikacja wynika z faktu, że $0 \leq c < 1$, natomiast druga wynika z definicji metryki d. ■

Przykład 4.4.1 (Przestrzeń** $\mathfrak{C}([0,1)$ **) *Ważną przestrzenią metryczną zupełną jest przestrzeń wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0,1]$ oznaczoną przez $X = \mathfrak{C}([0,1])$ z metryką zbieżności jednostajnej:*

$$(\forall f, g \in \mathfrak{C}([0,1]))(d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}).$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja d określona powyższym wzorem stanowi metrykę na przestrzeni X. Pokażemy, że nasza przestrzeń jest zupełna. Niech będzie dany ciąg podstawowy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Wówczas dla każdej liczby $x \in [0,1]$ ciąg wartości $(f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest ciągiem podstawowym na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ (która jako przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią zupełną). Wtedy dla dowolnego $x \in [0,1]$ istnieje $g(x) \in \mathbb{R}$ taka że $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$. Pokażemy, że $g \in X$ oraz $\lim_{n\to\infty} d(f_n, g) = 0$ czyli g jest jednostajną granicą ciągu f_n a więc g musi być funkcją ciągłą na mocy twierdzenia 7.4.2. Jednostajną zbieżność ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do funkcji g uzyskujemy, stosując twierdzenie 7.4.3. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolne, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że dla dowolnego $m, n > n_0$ $d(f_n, f_m) < \epsilon$ czyli $\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in [0,1]\} < \epsilon$. Niech $x \in [0,1]$ będzie dowolne, to wtedy mamy

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in [0,1]\} < \epsilon,$$

a więc założenie twierdzenia 7.4.3 jest spełnione.

4.5 Granica funkcji w przestrzeni metrycznej

W tym wykładzie zajmiemy sie pojeciem granicy funkcji w przestrzeni metrycznej, a więc w szczególności w przestrzeni euklidesowej. W tym celu wprowadzimy pojecie punktu skupienia podzbioru przestrzeni metrycznej.

Definicja 4.5.1 (Punkt skupienia) *Niech (X, d) będzie ustaloną przestrzenią metryczną i niech bedzie dany$x \in X$ oraz $A \subseteq X$. Powiemy, że x jest punktem skupienia zbioru A jeżeli*

$$(\forall r > 0)\ A \cap (B(x,r) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Przykład 4.5.1 *Liczby $0, \frac{1}{2}$ są punktami skupienia zbioru $(0,1)$. Pierwszy z nich nie jest elementem odcinka $(0,1)$, podczas gdy drugi należy do $(0,1)$.*

Zauważmy, że jeśli $A \subseteq X$ jest zbiorem domknietym w X, to każdy punkt skupienia, który nie jest w A jest punktem izolowanym (od zbioru A).

Definicja 4.5.2 (Granica funkcji) *Niech (X, d_X), (Y, d_y) będą przestrzeniali metrycznymi, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ będzie funkcją. Zaóóżmy, że $x_0 \in X$ jest punktem skupienia zbioru D i $y \in Y$, to*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\ 0 < d_X(x, x_0) < \delta \longrightarrow d_Y(f(x), y)) < \epsilon.$$

Jak widzimy, powyższa definicja jest naturalnym uogólnieniem granicy (w sensie Cauchy'ego) funkcji rzeczywistej jednej zmiennej znanej z kursu analiza matematyczna 1*. Tak jak we wpomnianym przed chwilą kursie, istnieje równoważna definicja (w sensie Heinego). Równoważność ta zachodzi jeżeli aksjomat wyboru jest spełniony (wystarczy nawet przeliczalna wersja aksjomatu wyboru).*

Definicja 4.5.3 (Granica funkcji w sensie Heinego) *Niech będą dane (X, d_X), (Y, d_y) przestrzenie metryczne, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ będzie funkcją. Zaóóżmy, że $x_0 \in X$ jest punktem skupienia zbioru D i $y \in Y$, to*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \longleftrightarrow (\forall (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (X \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}})\ \lim_{n \to \infty} t_n = x_0 \longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(t_n) = y.$$

Pozostając jeszcze przez chwilę w języku przestrzeni metrycznych, sformułujemy twierdzenie o jedyności granicy i twierdzenie o granicy funkcji złożonej.

Twierdzenie 4.5.1 (O jedyności granicy funkcji) *Jeżeli $(X, d_X)(Y, d_y)$, $D \subseteq X$, $x_0 \in X$ if $: D \to Y$ są takie jak w definicji granicy funkcji w punkcie x_0. Jeżeli ponadto $y, y' \in Y$ są takie, że $\lim_{x \to x_0} = y$ i $\lim_{x \to x_0} f(x) = y'$, to $y = y'$.*

Twierdzenie 4.5.2 (O funkcji złożonej) *Niech będą dane trzy przestrzenie metryczne (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z), zbiory $D \subseteq X$, $E \subseteq Y$, punkty $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ i $z_0 \in Z$ oraz funkcje $f : D \to Y$ i $g : E \to Z$ takie, że*

1. *x_0 jest punktem skupienia zbioru D, y_0 jest punktem skupienia zbioru E,*
2. *istnieje $r > 0$ takie, że $f[B(x_0, r) \setminus \{x_0\}] \subseteq E \setminus \{y_0\}$,*
3. *$lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim_{y \to y_0} g(y) = z_0$,*

to wtedy $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y \to y_0} g(y) = z_0$.

Dowód. *Niech będą spełnione założenia naszego twierdzenia. Skorzystamy z definicji Cauchy'ego granicy funkcji. Wybierzmy $\epsilon > 0$, to wtedy jest $\delta_Y > 0$ taka, że dla każdego $y \in E$ jeżeli $0 < d_Y(y, y_0) < \delta_Y$, to $d_Z(g(y), z_0) < \epsilon$. Wówczas z założenia, że $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ istnieje $\delta_X > 0$ taka, że dla każdego $x \in D$ jeśli $0 < d_X(x, x_0) < \delta_X$, to $d_Y(f(x), y_0) < \delta_Y$. Niech $\delta = \min\{\ \delta_X, r\}$, to wtedy $\delta > 0$ oraz*

$$(\forall x \in D)\ 0 < d_X(x, x_0) < \delta \longrightarrow f(x) \in E \setminus \{y_0\} \wedge d_Y(f(x), y_0) < \delta_Y.$$

Ponieważ dla każdego $y \in E$ zachodzi: jeżeli $0 < d_Y(y, y_0) < \delta_Y$, to $d_Z(g(y), z_0) < \epsilon$, to wtedy kładac $y = f(x)$ mamy

$$(\forall x \in D)\ (0 < d_X(x, x_0) < \delta \longrightarrow d_Z(g(f(x)), z_0) < \epsilon).$$

Wobec dowolności wyboru liczby $\epsilon > 0$ mamy

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D)\ (0 < d_X(x, x_0) \longrightarrow d_Z(g \circ f(x), z_0) < \epsilon).$$

Dowód twierdzenia został zakończony. ■
Jeżeli ograniczymy się do przestrzeni euklidesowych, to wtedy mamy analogiczne twierdzenie o arytmetyce granic funkcji oraz twierdzenie o trzech funkcjach do tych, które znamy z kursu analiza matematyczna 1. *Dowody wspomnianych są niemal identyczne ja te z kursu z* analiza matematyczna 1.

Twierdzenie 4.5.3 (O arytmetyce granic) *Jeżeli $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : D \to \mathbb{R}^m$, x_0 jest punktem skupienia zbioru D, jeżeli $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = b)$ to wtedy*

1. $\lim_{x \to x_0}(f + g)(x) = a + b = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$,
2. *jeżeli $\alpha \in \mathbb{R}$, to* $\lim_{x \to x_0}(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$,
3. *jeżeli $m = 1$, to* $\lim_{x \to x_0}(f \cdot g)(x) = a \cdot b = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$,
4. *jeśli $m = 1$ i $b \neq 0$, to* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$.

Tak jak widzimy, jest analogia dla twierdzenia o arytmetyce granic, tak samo istnieje podobieństwo w przypadku twierdzenia o trzech funkcjach.

Twierdzenie 4.5.4 (O trzech funkcjach) *Jeżeli $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, x_0 jest punktem skupienia zbioru D, jeśli*

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$,
2. $(\exists r > 0)(\forall x \in D)(0 < d(x, x_0) < r \longrightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x))$,

to $\lim_{x \to x_0} g(x)$ *istnieje i* $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$.

Przykład 4.5.2 *Pokażemy, że*

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

W tym celu zauważmy, że

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2}|y| \leq 1 \cdot |y| = |y|.$$

Ponieważ $lim_{(x,y) \to (0,0)}|y| = 0$, to z twierdzenia o trzech funkcjach mamy $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = 0$, *co jest równowazne temu, że* $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

Patrząc uważnie na definicję Heinego granicy funkcji, możemy poczynić następująca uwagę.,

Uwaga 4.5.1 *Jeżeli istnieją dwa rózne ciągi* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ *zbieżne do punkktu* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *oraz mamy funkcję* $f : D \to \mathbb{R}^m$ *taką, że*

- x_0 *jest punktem skupienia zbioru* $D \subseteq \mathbb{R}^n$,
- $(\forall n \in \mathbb{N})\ (t_n \neq x_0 \wedge s_n \neq x_0)$,
- $\lim_{n\to\infty} f(t_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(s_n)$,

to $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *nie istnieje.*

Przykład 4.5.3 *Zbadaj istnienie granicy*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Niech $s_n = (1/n, 0) \neq (0,0)$, *a* $t_n = (1/n, 1/n) \neq (0,0)$ *dla każdego dodatniego* $n \in \mathbb{N}$. *Mamy wtedy* $\lim_{n\to\infty} s_n = 0 = \lim_{n\to\infty} t_n$ *oraz*

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n \cdot 1/n}{(1/n)^2 + (1/n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{2 \cdot 1/n^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} f(s_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)\cdot 0}{1/n^2 + 0^2} = 0.$$

Więc granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

nie istnieje.

4.6 Funkcje ciągłe

Rozdziałe ten zaczniemy od podania definicji ciągłości funkcji w przestrzeniach metrycznych.

Definicja 4.6.1 (Funkcja ciągła) *Niech $(X, d_X), (Y, d_Y)$ będą przestrzeniami metrycznymi, niech $x_0 \in D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ będzie funkcją. To wtedy powiemy, że f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tutaj granicę funkcji rozumiemy jako granicę w sensie Cauchy'ego albo w sensie Heinego.

Funkcja stała $f(x) - c \in Y$ dla każdego $x \in X$ jest funkcją ciągłą w kazdym $x \in X$. Funkcja identycznościowa $X \ni x \mapsto f(x) = x \in X$ jest też funkcją ciągłą w każdym $x \in X$. Rzutowanie na i-tą oś

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \pi_i((x_1, \ldots, x_n)) = x_i \in \mathbb{R}, \ i \in \{1, \ldots, n\}$$

jest również funkcją ciągłą w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}^n$.

Tak jak w przypadku funkcji jednej zmiennej rzeczywistej prawdziwe jest twierdzenie o ciągłości złożenia funkcji ciągłych.

Twierdzenie 4.6.1 (O złożeniu funkcji ciągłych) *Niech (X_i, d_i) dla $i \in \{1, 2, 3\}$ będą przestrzeniami metrycznymi, $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$, $x \in X_1$, $y \in X_2$. Jeżeli f jest ciągła w x, g jest ciągła w y i $y = f(x)$, to $g \circ f : X_1 \to X_3$ jest funkcją ciągłą w punkcie x.*

Dowód. *Wystarczy zastosować Twierdzenie 4.5.3 o granicy funkcji złożonej.* ■

Stosując twierdzenie o arytmetyce granic funkcji mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.6.2 *Jeżeli $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ są funkcjami ciągłymi w punkcie $x_0 \in D$, to wtedy*

1. *$f + g$ jest funkcją ciągłą w x_0,*
2. *dla $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot f$ jest ciągła w x_0,*
3. *jesli $m = 1$, to $f \cdot g$ jest ciągła w x_0,*
4. *jeśli $m = 1$ i $g(x_0) \neq 0$, to $\frac{f}{g}$ jest ciągła w x_0.*

Powiemy, że $f : X \to Y$ jest ciągła jeżeli w każdym punkcie $x \in X$ funkcja f jest ciągła.

Dla funkcji ciągłyn na całej swojej dziedzinie mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.6.3 (O funkcji ciągłej) *Jeżeli $f : X \to Y$ jest funkcią pomiędzy przestrzeniami metrycznymi $(X, d_X), (Y, d_Y)$, to następujące warunki są równoważne:*

1. f jest funkcją ciągłą na zbiorze X,

2. przeciwobraz każdego zbioru otwartego w Y przez funkcje f jest zbiorem otwartym w X,

3. przeciwobraz każdego zbioru domkniętego w Y przez funkcje f jest zbiorem domkniętym w X.

Dowód. *[Dowód 1) $\to$ 2)] Niech $U \subseteq Y$ będzie dowoolnym zbiorem otwartym w Y. Pokażemy, że $f^{-1}[U]$ jest zbiorem otwartym w X. Niech $x \in f^{-1}[U]$ i $y = f(x)$, to wtedy $y = f(x) \in U$. Zbiór U jest z założenia zbiorem otwartym w Y, to istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $B(y, \epsilon) \subseteq U$. Ponieważ f jest ciągła w x, to jest $\delta > 0$ taka, że dla każdego $t \in X$ jeśli $d_X(t, x) < \delta$ to $d_Y(f(t), y) < \epsilon$. Więc mamy*

$$(\forall t \in X) t \in B(x, \delta) \longrightarrow f(t) \in B(y, \epsilon).$$

Ponieważ $B(y, \epsilon) \subseteq U$, więc

$$(\forall t \in X) t \in B(x, \delta) \longrightarrow f(t) \in U.$$

Z uwagi na fakt $f(t) \in U \longleftrightarrow t \in f^{-1}[U]$ mamy $B(x.\delta) \subseteq f^{-1}[U]$ dla pewnego $\delta > 0$. Wobec dowolności wyboru $x \in f^{-1}[U]$ wiemy, że $f^{-1}[U]$ jest zbiorem otwartym w X. ■

Dowód. *[Dowód 2) $\to$ 1)] Niech x będzie dowolnym punktem przestrzeni X i ϵ dodatnią liczbą rzeczywistą. Niech $y = f(x) \in Y$, to wtedy $B(y, \epsilon)$ jest zbiorem otwartym w Y. Ponieważ warunek 2) jest spełniony, to wtedy zbiór $f^{-1}[B(y, \epsilon)]$ jest otwarty w X. Ponieważ $f(x) = y \in B(y, \epsilon)$, to oczywiście $x \in f^{-1}[B(y, \epsilon)]$. Wobec otwartości tego ostatniego zbioru, istnieje $\delta > 0$ taka, że $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}[B(y, \epsilon)]$. Więc, dla każdego $t \in X$ mamy*

$$d_X(t, x) < \delta \longrightarrow t \in B(x, \delta) \longrightarrow t \in f^{-1}[B(y, \epsilon) \longrightarrow f(t) \in B(y, \epsilon) \longrightarrow \\ \longrightarrow d_Y(f(t), y) < \epsilon \longrightarrow d_Y(f(t), f(x)) < \epsilon.$$

Pokazaliśmy więc

$$(\forall x \in X)(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in X)\ d_X(t, x) < \delta \longrightarrow d_Y(f(t), f(x)) < \epsilon.$$

■

Dowód. *[Dowód 2) $\longleftrightarrow$ 3)] Dowód równoważności oprzemy na następującej równości: jeżeli $U \subseteq Y$ i $f : X \to Y$ to*

$$f^{-1}[Y \setminus U] = X \setminus f^{-1}[U].$$

Zauważmy, że dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$x \in f^{-1}[Y \setminus U] \longleftrightarrow f(x) \in Y \wedge \neg(f(x) \in U) \longleftrightarrow \neg(f(x) \in U) \longleftrightarrow \neg(x \in f^{-1}[U]) \\ \longleftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in f^{-1}[U]) \longleftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}[U].$$

Więc, jeżeli $F \subseteq Y$ jest domknięty w Y, to istnieje zbiór $U \subseteq Y$ otwarty w Y taki, że $F = Y \setminus U$. Z warunku 2) wiemy, że $f^{-1}[U]$ jest otwarty w X. Natomiast na mocy równości

$$f^{-1}[F] = f^{-1}[Y \setminus U] = X \setminus f^{-1}[U]$$

wiemy, że $f^{-1}[F]$ jest zbiorem domkniętym w X. Więc 3) jest udowodniona. Analogicznie, jeżeli 3) zachodzi i $U \subseteq Y$ jest otwarty w Y, to wtedy $F = Y \setminus U$ jest zbiorem domkniętym w Y i wtedy korzystając z 3) zbiór $f^{-1}[F]$ jest domknięty w X a stąd na mocy równości

$$f^{-1}[U] = f^{-1}[Y \setminus F] = X \setminus f^[-1][F],$$

zbiór $f^{-1}[U]$ jest zbiorem otwartym w X, co kończy dowód implikacji 3) $\to$ 2) a więc całego twierdzenia. ■

Wprost z wymienionych tutaj twierdzeń wynika, że każdy wielomian $f \in \mathbb{R}[]x_1, \ldots, x_n]$ o n zmiennych rzeczywistych jest funkcją ciągłą. Ponadto, jesli $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ i $g(x_0) \neq 0$ to funkcja wymierna $\frac{f}{g}$ jest funkcją ciągłą w x_0.

Jako zastosowanie powyższego twierdzenia posłużą nam następujące przykłady.

Przykład 4.6.1 *Niech $\bar{n} = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^n$ będzie niezerowym wektorem, $A_{n+1} \in \mathbb{R}$ oraz $H_n \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie $n-1$ wymiarową hiperpłaszczyzną:*

$$\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} A_k x_k + A_{n+1} = 0\}$$

Pokażemy, że hiperpłaszczyzna H_n jest domknięta w $\mathbb{R}^n$. Rozważmy funkcję (wielomian n zmiennych) ciągłą $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określoną wzorem:

$$(\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n)\ f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} A_k x_k + A_{n+1}$$

Bez trudu zauważamy, że $H_n = f^{-1}[\{0\}]$. Ponieważ $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ jest domknięty w $\mathbb{R}$ i f jest ciągła, to H_n jest również domknięty ale w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Przykład 4.6.2 *Rozważmy n-wymiarowy sympleks*

$$S_n\{(t_0, \ldots t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ (\forall k \in \{0, \ldots, n\}) t_k \in [0,1] \wedge \sum_{k=0}^{n} t_k = 1\}.$$

Wtedy mamy

$$S_n = \left(\bigcap_{k=0}^{n} \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ t_k \in [0,1]\} \right) \cap \left\{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ \sum_{k=0}^{n} t_k = 1\right\}$$

Dla każdego $k \in \{0, \ldots, n\}$ niech $\pi_k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ będziee rzutowaniem $n+1$-wymiarowego wektora na jego k-tą oś i niech $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ będzie określone następujaco, dla każdego

$(t_0, \ldots, n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *niech* $f(t_0, \ldots, t_n) = \sum_{k=0}^{n} t_k \in \mathbb{R}$. *Oczywiście wszystkie wspomniane funkcje sa ciągłe oraz zachodzi następujący związek*

$$S_n = \left(\bigcap_{k=0}^{n+1} \pi_k^{-1}[0,1] \right) \cap f^{-1}[\{1\}].$$

Ponieważ $[0,1], \{1\}$ *są zbiorami domkniętymi w* $\mathbb{R}$, *więc sympleks* S_n *jest zbiorem domkniętym w* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Zauważmy, że* $S_n \subseteq B(\bar{0}), 2)$. *Więc* S_n *jest zbiorem zwartym w* $\mathbb{R}^{n+1}$ *jako podzbiór domknięty i ograniczony w przestrzeni euklidesowej.*

Twierdzenie 4.6.4 (O kresach funkcji ciągłej) *Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną. Niech* $F \subseteq D \subseteq X$ *i funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$ *jest taka, że*

1. f *jest ciągła w każdym punkcie zbioru* F,
2. F *jest zwarty w* (X, d),

to wtedy

1. f *jest ograniczona na* F *t.j.* $(\exists M \geq 0)(\forall x \in F)\ |f(x)| \leq M$,
2. *istnieje* $z_0 \in F$ *takie, że* $f(x_0) = \sup\{f(x) :\ x \in F\}$,
3. *istnieje* $z_0 \in F$ *takie, że* $f(y_0) = \inf\{f(x) :\ x \in F\}$.

Dowód. *Pokażemy, że funkcja ciągła* f *jest ograniczona na zbiorze zwartym* F. *Załóżmy, że nie jest ograniczona na* F, *to dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje* $x_n \in F$ *takie, że* $n < |f(x_n)|$. *Ze zwartosci* F *wynika, że istnieje podciąg* $(y)_{n\in\mathbb{N}}$ *ciągu* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zbieżny do pewnego punktu* $z \in F$. *Zauważmy, że istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *taki, że dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$ $y_n = x_{k_n}$ *oraz że* $n \leq k_n$. *Więc dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ $n \leq k_n \leq |f(x_{k_n})| = |f(y_n)|$. *Z druiej strony mamy*

$$\mathbb{R} \ni |f(z)| = |f(\lim_{n\to\infty} y_n))| = \lim_{n\to\infty} |f(y_n)| \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

sprzeczność. Pierwsza teza twierdzenia została udowdniona. Dowód trzeciej tezy przebiaga analogicznie do dowodu drugiej, więc udowodnimy tylko tę drugą. Zauważmy, że jeśli F *jest zbiorem zwartym i niepustym, to z udowodnionej przed chwilą pierwszą tezą wynika, że nastepujący zbiór*

$$A = \{f(x) :\ x \in F\}$$

jest niepusty i ograniczony w $\mathbb{R}$. *Więc zbiór* A *ma kres dolny i kres górny. Niech* $M = \sup A$. *Wtedy dla każdego dodatniego* $n \in \mathbb{N}$ *istnieje* $x_n \in F$ *taki, że* $M - 1/n < f(x_n) \leq M$. *Tak jak poprzedni, istnieje podciąg* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ciągu* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zbieżny do pewnego* $z_0 \in F$. *Wówczas dla dowolnej dodatniej liczbie naturalnej* n *mamy*

$$M - 1/n < f(y_n) \leq M.$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach mamy $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = M$*. Z drugiej strony funkcja* f *jest ciągła na całym zbiorze* F *aa więc też w puunkcie* $z_0 \in F$*. Więc mamy*

$$f(z_0) = f(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = M = \sup A.$$

Punkt drugi został więc udowodniony. ■
Zastosujemy powyższe twierdzenie w następującym przykładzie.

Przykład 4.6.3 *Udowodnić, że wsród wszystkich trójkątów o ustalonym obwodzie istnieje ten, który ma największe pole. Niech będzie ustalona liczba dodatnia* L *Niech* $\mathfrak{R}$ *będzie rodziną wszystkich trójkątów* T *takich że* $L = l(T)$*, gdzie* $l(T)$ *jest sumą długości wszystkich boków* T*. Dopuszczamy też takie* $T \in \mathfrak{R}$*, że jego pole jest równe* 0*. Do rozwiązania tego zagadnienia posłużymy się wzorem Herona. Niech* $T \in \mathfrak{R}$ *będzie trójkątem o bokach* a, b, c*, to wtedy* $L = l(T) = a + b + c = 2p$ *oraz*

$$p(T) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{L/2(L/2-a)(L/2-b)(L/2-(L-a-b))}$$

gdzie $p(T)$ *jest polem trójkąta* T *i*

$$0 \le a \wedge 0 \le b \wedge a + b \le L.$$

Niech $F \subseteq \mathbb{R}^2$ $f : F \to \mathbb{R}$ *będzie zadana wzorm następującym: dla* $(x, y) \in F$

$$f(x,y) = \sqrt{L/2(L/2-a)(L/2-b)(L/2-(L-a-b))},$$

gdzie

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \in [0, L] \wedge x + y \in [0, L]\}.$$

Zbiór D *jest zbiorem domkniętym i ograniczonym w* $\mathbb{R}^2$ *a więc jest zbiorem zwartym na płaszczyźnie rzeczywistej. Funkcja* f *jest funkcją ciągłą na zbiorze* F*, więc na mocy twierdzenia o kresach,* f *osiąga swoje kresy na zbiorze F. Zauaważmy, że*

$$\{p(T) : \ T \in \mathfrak{R}\} = \{f(x,y) : \ (x,y) \in F\}.$$

Więc istnieje trójkąt $T \in \mathfrak{R}$*, który ma największe pole powierzchni wśród wszystkich trójkątów rozważanej rodziny.*

Rozdział 5

Rachunek różniczkowy wielu zmiennych

5.1 Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych

Podobnie jak w przypadku rachunku różniczkowego jednej zmiennej, rachunek różniczkowy wielu zmiennych ma zastosowanie w zagadnieniach optymalnych występujących na przykład w technice, w geometrii czy też w fizyce.

Podstawowym pojęciem rachunku różniczkowego są pochodna cząstkow funkcji o raz jej różniczkowalność.

Definicja 5.1.1 (Pochodna cząstkowa) *Niech $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $B(y_0, r)) \subseteq D$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą n zmiennych. Niech $\{e_k \in \mathbb{R}^n : k \in \{1, \dots, n\}\}$ będzie bazą standardową w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że y_0 nie jest punktem izolowanym w D oraz niech $i \in \{1, \dots, n\}$ będzie ustalone, to granicę*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(y_0 + te_i) - f(y_0)}{t}$$

nazywamy pochodną cząstkowej względem i-tej zmiennej w punkcie x_0 i oznaczamy przez $\frac{\partial f}{\partial x_i}(y_0)$.

Analogicznie definiujemy pochodne wyższych rzędów. Mianowicie, jeśli $m \in \mathbb{N}$ jest dodatnią liczbą naturalną, $i_1, \dots i_m, i_{m+1} \in \{1, \dots, n\}$ i załóżmy, że dla każdego $y \in B(y_0, r)$ $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_1}}(y)$ istnieje (i jest zdefiniowana). Jeżeli granica

$$\lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_1}}(y_0 + te_{i_{m+1}}) - \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_1}}(y_0)}{t}$$

istnieje, to nazywamy ją pochodną cząstkową $m+1$-tego rzędu względem $x_{i_1}, \dots, x_{i_{m+1}}$ zmiennych w punkcie y_0 i oznaczamy ją przez

$$\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_{m+1}} \partial x_{i_m} \dots \partial x_{i_1}}(y_0).$$

Pochodną cząstkową $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}\ldots\partial x_{i_1}}(y)$ *będziemy też dla krótszego zapisu oznaczać przez* $f'_{x_m\ldots,x_1}$ *albo* $f_{x_m\ldots,x_1}$.

Wprost z definicji pochodnej cząstkowej względem i-tej zmiennej, obliczamy ją tak jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, traktując pozostałe zmienne jako stałe, to znaczy nasza funkcja zmienia się jedynie wzdłuż i-tej zmiennej. Zobaczmy to na przykładzie.

Przykład 5.1.1 *Niech* $f(x,y) = x^3y^2 + \sin x \cdot \cos y$ *wtedy*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y^2 + \sin x \cos y) = 3x^2y^2 + \cos x \cdot \cos y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2 + \sin x \cos y) = x^3(2y) + (\sin x)(-\sin y) = 2x^3y - \sin x \cdot \sin y.$$

Obliczmy wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 + \cos x \cdot \cos y\right)(x,y) = 6xy^2 - \sin x \cdot \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 + \cos x \cdot \cos y\right)(x,y) = 6x^2y - \cos x \cdot \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y - \sin x \cdot \sin y\right)(x,y) = 6x^2y - \cos x \cdot \sin y,$$

oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3y - \sin x \cdot \sin y\right)(x,y) = 2x^2 - \sin x \cdot \cos y.$$

Zauważmy, że w naszym przykładzie pochodne mieszane $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ *i* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ *są równe. Nie jest to przypadek. Mianowicie, zachodzi następujące twierdzenie*

Twierdzenie 5.1.1 (Schwartza) *Jezeli* U *jest zbiorem otwartym w* $\mathbb{R}^n$, $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ *i* $f : D \to \mathbb{R}$ *ma ciągłe pochodne* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *i* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *w każdym punkcie* $y \in U$, *to wtedy*

$$(\forall y \in U)\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(y).$$

Przejdźmy jeszcze do następnego przykładu.

Przykład 5.1.2 *Obliczymy pochodne pierwszego rzędu funkcji* $f(x,y)$ *punkcie* $(0,0)$, *gdzie*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2(1+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Korzystając z definicji pochodnej cząstkowej mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{|t|}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{|t|}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0.$$

Zauważmy, że pierwsza granica nie istnieje a więc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *nie istnieje, podczas gdy druga jest równa* 0.

Kolejny przykład ilustruje taką sytuację w odróżnieniu do funkcji rzeczywistej jednej zmiennej, że istnieje funkcja f *nieciagła w danym punkcie, podczas gdy wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu istnieją.*

Przykład 5.1.3 *Niech będzie dana funkcja* $:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *zadana w sposób następująco*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x\cdot y \neq 0 \\ 0 & x \cdot y = 0. \end{cases}$$

Ewidentnie, funkcja f *nie jest ciągłą w* $(0,0)$, *podczas gdy jej pochodne istnieją:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0,$$

i analogicznie $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Wprost z definicji pochodnej cząstkowej mamy nastepujący fakt.

Fakt 5.1.1 *Niech* $y \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ $f,g : D \to \mathbb{R}$ *takie, że istnieją* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)$ *oraz* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)$ *dla pewnego* $i \in \{1,\ldots,n\}$, $c \in \mathbb{R}$, *to*

1. $\frac{\partial (f+g)}{\partial x_i}(y)$ *istnieje a także* $\frac{\partial (f+g)}{\partial x_i}(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(y)$,
2. $\frac{\partial (c\cdot f)}{\partial x_i}(y)$ *istnieje oraz* $\frac{\partial (c\cdot f)}{\partial x_i}(y) = c \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)$.

Pewnym uogólnieniem pochodnej cząstkowej zadanej funkcji jest tak zwana pochodna kierunkowa tej funjcji wzdłuż ustalonego wektora.

Definicja 5.1.2 (Pochodna kierunkowa) *Niech* $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $B(y_0,r)) \subseteq D$ *oraz* $f : D \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją rzeczywistą* n *zmiennych. Niech* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *będzie unorwmowanym wektorem (tzn.* $\|\bar{v}\| = 1$*) . Załóżmy, że* y_0 *nie jest punktem izolowanym w* D *oraz niech* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *będzie ustalone, to granicę*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(y_0+t\bar{v})-f(y_0)}{t}$$

nazywamy pochodną kierunkową wzdłuż wektora $\bar{v}$ *w punkcie* x_0 *i oznaczamy przez* $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(y_0)$.

Jeżeli $\bar{v} = e_i$, *to* $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_0)$. *Oczywiście mamy analogiczny fakt do tego, który dotyczy pochodnej cząstkowej.*

Fakt 5.1.2 *Niech* $y \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ $f, g : D \to \mathbb{R}$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *takie że,* $\|\bar{v}\| = 1$, *istnieją* $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(y)$ *oraz* $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(y)$, $c \in \mathbb{R}$, *to*

1. $\frac{\partial (f+g)}{\partial \bar{v}}(y)$ *istnieje a także* $\frac{\partial (f+g)}{\partial \bar{v}}(y) = \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(y) + \frac{\partial g}{\partial \bar{v}}(y)$,
2. $\frac{\partial (c \cdot f)}{\partial \bar{v}}(y)$ *istnieje oraz* $\frac{\partial (c \cdot f)}{\partial \bar{v}}(y) = c \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(y)$.

Rozważmy następujący przykład.

Przykład 5.1.4 *Niech będzie dany wektor* $\bar{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$ *oraz* $f(x, y) = x^2 y + 1$ *oraz punkt* $(x_0, y_0) = (1, 3)$. *Liczymy*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(x_0, y_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t\bar{v}) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(1 + t/2, 3 + t\sqrt{3}/2) - f(1, 3)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(1 + t/2)^2 (3 + t\sqrt{3}/2) + 1 - (1^2 3 + 1)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(1 + t + t^2/4)(3 + t\sqrt{3}/2) + 1 - 4}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{t\sqrt{3}/2 + 3t + t^2\sqrt{3}/2 + t^2 3/4 + t^3\sqrt{3}/8}{t} = \sqrt{3}/2 + 3.
\end{aligned}$$

Jak się okazuje, istnieje związek pomiędzy pochodną kierunkową a tak zwanym gradientem funkcji. Związek ten pozwala na prostsze obliczanie pochodnych kierunkowych z pewnych funkcji wielu zmiennych.

Definicja 5.1.3 (gradient funkcji) *Niech* $y \in U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$, U *otwarty,* $f : D \to \mathbb{R}$ *taka że wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu istnieją, to wektor*

$$\nabla f(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(y) \right).$$

Tak jak w przypadku pochodnej kierunkowej czy cząstkowej, gradient jest operatorem liniowym na przestrzeni funkcji rzeczywistych n *zmiennych mających wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w ustalonym punkcie. Tak więc* $\nabla(f + g)(y) = \nabla f(y) + \nabla g(y)$ *i* $\nabla(c\dot{f})(y) = c\dot{\nabla} f(y)$.

Przejdźmy do wspomnianego związku pomiędzy pochodną kierunkową a gradientem.

Twierdzenie 5.1.2 (O pochodnej kierunkowej) *Niech* $f : D \to \mathbb{R}$ *będzie taką funkcją, że w pewnym otoczeniu* U *punktu* $y \in U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ *wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu istnieją i są ciągłe,* $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ *jest wektorem unormowanym, to* $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(y)$ *istnieje oraz*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(y) = (\nabla f(y), \bar{v}),$$

gdzie $(\cdot, \cdot)$ *jest standardowym iloczynem skalarnym w* n*-wymiarowej przestrzeni euklidesowej.*

Dowód tego twierdzenia podamy w rozdziele o różniczkowalności funkcji.

Przykład 5.1.5 *Niech f, $\bar{v}$ i $(x_0, y_0))$ będą takie same jak w poprzednim przykładzie. Wpierw obliczmy gradient funkcji*

$$\nabla f((x,y)) = \nabla(x^2y+1) = (2xy, x^2).$$

Więc stosując powyższe twierdzenie (łatwo sprawdzamy założenia tego twierdzenia) otrzymujemy:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(y) = ((2xy, x^2)\restriction_{(x,y)=(1,3)}, (1/2, \sqrt{3}/2) = ((6,1),(1/2,\sqrt{3}/2) = 3+\sqrt{3}/2.$$

5.2 Funkcje różniczkowalne

Definicja 5.2.1 (Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych) *Niech będzie dany zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $x_0 \in D$ taki, że dla pewnego $r > 0$, $B(x_0, r) \subseteq D$. Nich $f : D \to \mathbb{R}^m$ będzie funkcją wielu zmiennych. Powiemy że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 jeżeli istnieją funkcja $u : D \times D \to \mathbb{R}^m$ oraz macierz $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ takie że*

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in B(x_0, \delta))\ (f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + u(x, x_0)) \wedge \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,x_0)}{\|x - x_0\|} = \bar{0}$$

lub równoważnie

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} = 0.$$

Twierdzenie 5.2.1 *Jeżeli $f : D \to \mathbb{R}^m$ jest funkcją różniczkowalną w $x_0 \in D$ i ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w x_0, to macierz A jest jedyna i wyraża się wzorem następującym:*

$$(\forall i \in \{1, \ldots, m\})(\forall j \in \{1, \ldots, n\})\ [A]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0),$$

gdzie $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, dla pewnych funkcji $f_i : D \to \mathbb{R}$ oraz $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Dowód. *Niech f będzie funkcją rózniczkowalną w $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ $x = x_0 + te_j$ gdzie $e_j = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0)$ jest j-tym wektorem z bazy standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ będzie macierzą, taką że*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} = 0.$$

Wtedy zapisując wektory $f(x), f(x_0)$ kolumnowo mamy:

$$
\begin{aligned}
0 =& \lim_{t\to 0} \frac{1}{\|0,\dots,t,\dots,0)\|} \left\| \begin{pmatrix} f_1(x)-f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x)-f_m(x_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\
=& \lim_{t\to 0} \left\| \begin{pmatrix} \frac{f_1(x_0+te_j)-f_1(x_0)}{t} - a_{1j} \\ \vdots \\ \frac{f_1(x_0+te_j)-f_1(x_0)}{t} - a_{1j} \end{pmatrix} \right\| \longleftrightarrow (\forall i\{1,\dots,m\}) \lim_{t\to 0} \frac{f_i(x_0+te_j)-f_i(x_0)}{t} = a_{ij}
\end{aligned}
$$

. Ponieważ $j \in \{1,\dots,n\}$ było dowolne, więc mamy

$$(\forall i \in \{1,\dots,m\})(\forall j \in \{1,\dots,n\}) \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = a_{ij} = [A]_{ij} \right),$$

co należało dowieść. ∎

Definicja 5.2.2 (Macierz Jacobiego) *Załóżmy że funkcja $f : U \to \mathbb{R}^m$ jest określona na pewnym zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i posiada na U wszystkie pochodne pierwszego rzędu, to macierz $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ taką że*

$$(\forall i \in \{1,\dots,m\})(\forall j \in \{1,\dots,n\})\ [A]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x),$$

nazywamy macierzą Jacobiego funkcji f na zbiorze U w punkcie $x \in U$ i oznaczamy ją przez $J_f(x)$.

Twierdzenie 5.2.2 *Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągła.*

Dowód. *Zauważmy że*

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) =& f(x_0) + \lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = f(x_0) + \\
&+ \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0) - A(x-x_0)}{\|x-x_0\|} \|x - x_o\| + A(x-x_0) \right) = \\
=& f(x_0) + 0 = f(x_0).
\end{aligned}
$$

∎

Twierdzenie 5.2.3 *Jeżeli funkcja f ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągłe w otoczeniu punktu $\bar{x}_0$, to f jest funkcą różniczkowalną w $\bar{x}_0$.*

Dowód. *Niech $\bar{x}, \bar{x}_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, gdzie U jest zbiorem otwartym na którym wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są funkcjami ciągłymi. Niech $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Dla $k = 1, \ldots n$ załóżmy, że $\bar{x}_k = (x_1^0, \ldots, x_k^0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Dla każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$ mamy*

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{x}_0) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}_0)(x_k - x_k^0) &= \sum_{k=1}^n \left(f_i(\bar{x}_{k-1}) - f_i(\bar{x}_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}_0)(x_k - x_k^0) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{\xi_k})((\bar{x}_{k-1})_k - (\bar{x}_k)_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}_0)(x_k - x_k^0) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{\xi_k})(x_k - x_k^0) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}_0)(x_k - x_k^0) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{\xi_k}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}_0) \right)(x_k - x_k^0) \end{aligned}$$

Jeżeli $\bar{x}$ dąży do $\bar{x}_0$, to dla każdego k, $\bar{x}_k \in U$ oraz $\bar{\xi_k} \in U$ dążą do $\bar{x}_0$ oraz $\frac{|x_k - x_k^0|}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \leq 1$. Wtedy, korzystając z faktu, że pochodne cząstkowe są ciągłe na U dla każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$, mamy

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \frac{\|f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{x}_0) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}_0)(x_k - x_k^0)\|}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0.$$

W konsekwencji mamy:

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \frac{\|f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - J_f(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)\|}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0,$$

co należało dowieść. ■

Teraz przeprowadzimy dowód twierdzenia o pochodnej kierunkowej, patrz Twierdzenie 5.1.2. Dowód tego twierdzenia podajemy tutaj, bo tak naprawdę wystarczy założenie o różniczkowalności funkcji w punkcie bez potrzeby założenia ciągłości pochodnych w otoczeniu punktu w którym liczymy pochodną kierunkową. **Dowód.** *O pochodnej kierunkowej Niech f będzie funkcją różniczkowalną funkcją w punkcie $y \in \mathbb{R}^n$ oraz $\bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ ustalonym niezerowym wektorem. Niech $J_f(y)$ będzie macierzą Jacobiego f w punkcie y. Niech $x = y + t\bar{v}$, to z różniczkowalności mamy*

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{x \to y} \frac{|f(x) - f(y) - J_f(y)(x - y)|}{\|x - y\|} &= \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(y + t\bar{v}) - f(y) - tJ_f(y)\bar{v}}{t} \right| \frac{1}{\|\bar{v}\|} \\ = \frac{1}{\|\bar{v}\|} \left| \lim_{t \to 0} \frac{f(y + t\bar{v}) - f(y)}{t} - J_f(y)\bar{v} \right| \end{aligned}$$

W takim razie

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(y + t\bar{v}) - f(y)}{t} = J_f(y)\bar{v} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(y), \ldots, \frac{\partial f}{\partial n}(y)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (\nabla f(y), \bar{v}).$$

W szczególności, jeśli wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są ciągłe w pewnym otoczeniu punktu y, to f jest rózniczkowalna w y i mamy tezę twierdzenia o pochodnej kierunkowej. ■

Zauważmy, że jeżeli f o wartościach w $\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x_0 \in \mathbb{R}^n$, to wtedy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - J_f(x_0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Jeżeli przyjmiemy $y_0 = f(x_0)$ a $y = f(x)$, to z powyższego warunku płaszczyzna o równaniu

$$y - y_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x^i - x_0^i)$$

jest dobrym przybliżeniem funkcji f w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0) \in f$. Wtedy mówimy, że hiperpłaszczyzna π o równaniu danym powyżej jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

W szczególności f jest funkcją rzeczywistą dwóch zmiennych różniczkowalną w punkcie (x_0, y_0), to przyjmujac za $z_0 = f(x_0, y_0)$ płaszczyzna π styczna do f w punkcie (x,y_0, z_0) ma postać

$$z - z_0 = \frac{\partial x}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Przykład 5.2.1 *Niech $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$. To wtedy $f(x_0, y_0) = 1$, $f'_x(x, y) = 2x$, $f'_y(x, y) = -2y$. Więc, korzystając ze wzoru na równanie płaszczyzny stycznej do f wpunkcie $(1, 1, 1)$*

$$z - 1 = 2(x - 1) + (-2)(y - 1).$$

Podamy teraz twierdzenie o różniczkowalności funkcji złożonej.

Twierdzenie 5.2.4 *Niech k, m, n będą dodatnimi liczbami naturalnymi, $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, $y_0 \in V \subseteq \mathbb{R}^k$ będą punktami zawartymi w pewnych zbiorach otwartych U i V odpowiednio. Niech $f : D_f \to \mathbb{R}^k$, $g : D_g \to \mathbb{R}^m$ będą funkcjami takimi że*

1. *$U \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^n$,*

2. *$V \subseteq D_g \subseteq \mathbb{R}^k$ i $V \subseteq f[D_f]$,*

3. *$y_0 = f(x_0)$,*

4. *f jest różniczkowalna w x_0 i B jest macierzą Jacobiego funkcji f w punkcie x_0,*

5. *g jest różniczkowalna w y_0 i A jest macierzą Jacobiego funkcji g w punkcie y_0,*

to funcja złożona $g \circ f$ jest też różniczkowalna w x_0 oraz macierz $A \cdot B$ jest macierzą Jacobiego funkcji $g \circ f$ w x_0.

Dowód. *Pokażemy, że*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\|g\circ f(x)-g\circ f(x_0)-AB(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}=0.$$

Z ciągłości funkcji f, istnieje takie $r>0$, że $K(x_0,r)\subseteq U$ oraz $f[K(x_0,r)]\subseteq V$. Niech $y=f(x)$ dla $x\in K(x_0,r)$.

Zauważmy, że istnieją funkcje u,v, takie że $f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+u(y)$ i $lim_{x\to x_0}\frac{\|u(x)\|}{\|x-x_0\|}=0$, $g(y)=g(y_0)+A(y-y_0)+v(y)$ i $lim_{y\to y_0}\frac{\|v(y)\|}{\|y-y_0\|}=0$. Więc mamy

$$\frac{\|g\circ f(x)-g\circ f(x_0)-AB(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}\leq\frac{\|g(y)-g(y_0)-A(y-y_0)\|}{\|y-y_0\|}\frac{\|y-y_0\|}{\|x-x_0\|}+$$
$$+\frac{\|A(y-y_0)-AB(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}=\frac{\|v(y)\|}{\|y-y_0\|}\frac{\|A(x-x_0)+u(x)\|}{\|x-x_0\|}+\|A\|\frac{\|f(x)-f(x_0)-B(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}$$
$$=\frac{\|v(y)\|}{\|y-y_0\|}\left(\|A\|+\frac{u(x)}{\|x-x_0\|}\right)+\|A\|\frac{\|u(x)\|}{\|x-x_0\|}.$$

Ponieważ założyliśmy że $y=f(x)$ oraz $y_0=f(x_0)$, to z ciągłości funkcji f mamy: jeśli $x\to x_0$, to $y\to y_0$. Stąd dla x-a dążącego x_0, ostatnie wyrażenie w powyższej nierówności dąży do zera, więc także pierwsze wyrażenie (które jest nieujemne) również dąży do 0, gdy x dąży do x_0. ■

Wprost z twierdzenia o różniczkowalności funkcji złożonej mamy następujący fakt.

Fakt 5.2.1 *Niech $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ będa funkcjami różniczkowalnymi w $y\in\mathbb{R}^2$ i $z\in\mathbb{R}^2$ odpowiednio. Załóżmy, że $(x_0,y_0)=g(u_0,v_0)=(g_1(u_0,v_0),g_2(u_0,v_0))$. Wtedy*

$$\frac{\partial f\circ g}{\partial u}((u_0,v_0))=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial g_1(u,v)}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial g_2(u,v)}{\partial u}(u_0,v_0),$$
$$\frac{\partial f\circ g}{\partial v}((u_0,v_0))=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial g_1(u,v)}{\partial v}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial g_2(u,v)}{\partial v}(u_0,v_0).$$

Dowód. *Zauważmy, że*

$$J_f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix},$$

$$J_g(u_0,v_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u_0,v_0)\end{pmatrix}.$$

Na mocy twierdzenia o różniczkowalności funkcji złożonej, mamy

$$\begin{aligned}J_{f\circ g}(u_0,v_0)=&J_f(x_0,y_0)\cdot J_g(u_0,v_0)\\ =&\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial g_1(u,v)}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial g_2(u,v)}{\partial u}(u_0,v_0),\\ &\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial g_1(u,v)}{\partial v}(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial g_2(u,v)}{\partial v}(u_0,v_0)\Big),\end{aligned}$$

■

Przykład 5.2.2 *Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będa dane w sposób następujący:*

$$g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v)) = (u - v, uv), \quad f(x, y) = xe^y.$$

Oczywiście wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f i g istnieją i są ciągłe w całej dziedzinie tych funkcji. Niech $(x, y) = g(u, v)$. Stosując powyższy fakt, mamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial f\circ g}{\partial u}(u,v) =& \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(x,y)\frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v)\\ =&\frac{\partial}{\partial x}(xe^y)\frac{\partial}{\partial u}(u-v) + \frac{\partial}{\partial y}(xe^y)\frac{\partial}{\partial u}(uv)\\ =&e^y\cdot 1 + xe^y v = y^{uv} + (u-v)e^{uv}v,\end{aligned}$$

Podobnie

$$\begin{aligned}\frac{\partial f\circ g}{\partial v}((u,v)) =& \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial g_2}{\partial v}(u_0,v_0)\\ =&\frac{\partial}{\partial x}\bigg(xe^y\bigg)\frac{\partial}{\partial v}\bigg(u-v\bigg) + \frac{\partial}{\partial y}\bigg(xe^y\bigg)\frac{\partial}{\partial v}\bigg(uv\bigg)\\ =&e^y(-1) + xe^y u = -e^{uv} + (u-v)e^{uv}u\end{aligned}$$

Obliczymy teraz te pochodne na bezpośrednio wyliczonym złożeniu funkcji $f \circ g$, mianowicie mamy

$$f \circ g(u, v) = f(g(u, v)) = f(u - v, uv) = (u - v)e^{uv}.$$

Stąd korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu (zmienną v traktujemy jak stałą) otrzymujemy

$$\frac{\partial f\circ g}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\bigg((u-v)e^{uv}\bigg) = 1e^{uv} + (u-v)e^{uv}v$$

i analogicznie

$$\frac{\partial f\circ g}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\bigg((u-v)e^{uv}\bigg) = (-1)e^{uv} + (u-v)e^{uv}u.$$

Widzimy, że pochodne obliczone dwoma sposobami dają ten sam rezultat (co gwarantuje nam udowodniony przed chwilą fakt).

Podobnie, stosując twierdzenie różniczkowalności funkcji złożonej, mamy kolejny fakt.

Fakt 5.2.2 *Niech $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ będa funkcjami różniczkowalnymi w $(x_0, y_0) = f(t_0) \in \mathbb{R}^2$ i $t_0 \in \mathbb{R}$ odpowiednio. Wtedy*

$$\frac{\partial g_1\circ f}{t_0} = \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial f_1(t)}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial f_2(t)}{\partial t}(t_0),$$

$$\frac{\partial g_2\circ f}{t_0} = \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial f_1(t)}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial f_2(t)}{\partial t}(t_0).$$

Przykład 5.2.3 *Niech będą dane funkcje różniczkowalne $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ oraz $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, takie że dla pewnych funkcji $f_1,\dots,f_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mamy $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$ dla dowolnego $x\in\mathbb{R}^n$. Wtedy macierze Jacobiego są odpowiednio równe:*

$$J_g(y)=\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(y)\dots\frac{\partial g}{\partial x_n}(y)\right);\ J_f(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x).\end{pmatrix}$$

Więc pochodna funkcji złożonej (czyli macierz Jacobiego) w punkcie x wynosi

$$J_{g\circ f}(x)=\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial g}{\partial x_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x),\dots,\sum_{k=1}^n\frac{\partial g}{\partial x_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x)\right)$$

Przykład 5.2.4 *Niech $x,x_0\in\mathbb{R}^n$ będą dwoma ustalonymi wektorami. Niech $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ będzie funkcją jednej zmiennej o wartościach w $\mathbb{R}^n$ zadaną wzorem następującym:*

$$(\forall t\in\mathbb{R})\ h(t)=x_0+t(x-x_0)=(x_1^0-t(x_1-x_1^0),\dots,x_n^0-t(x_n-x_n^0)).$$

Wtedy, funkcja f jest różniczkowalna w punkcie t i jej macierz Jacobiego wynosi:

$$J_h(t)=\begin{pmatrix}x_1-x_1^0\\ \vdots\\ x_n-x_n^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix},$$

gdzie $\Delta x_k=x_k-x_k^0$ dla dowolnego $k\in\{1,\dots,n\}$.

Przykład 5.2.5 (Wzór Taylora funkcji rzeczywistej wielu zmiennych) *Niech $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w punkcie x_0. Ustalmy dowolny punkt $x\in\mathbb{R}^n$ i niech $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją jednej zmiennej zdefiniowanej następująco:*

$$(\forall t\in\mathbb{R})\ \varphi(t)=f(x_0+t(x-x_0))=f\circ h(t)$$

jako złożenie funkcji f z funkcją h zdefiniowaną tak jak w poprzednim przykładzie:

$$(\forall t\in\mathbb{R})\ h(t)=x_0+t(x-x_0)=(h_1(t),\dots,h_n(t))=(x_1^0-t(x_1-x_1^0),\dots,x_n^0-t(x_n-x_n^0)).$$

Wówczas pochodna funkcji φ wyraża się wzorem następującym

$$\varphi'(t)=J_\varphi(t)=J_f(h(t))J_h(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(h(t)),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(h(t))\right)\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \vdots\\ \Delta x_n\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}(h(t))\Delta x_k.$$

Jeżeli ponadto, założymy że istnieją wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f, to różniczkując funkcję $\frac{\partial f}{\partial x_k}h(t)$ jak poprzednio po zmiennej t otrzymujemy:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(h(t))\right)_t'=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(h(t))\right)(h_i(t))_t'=\sum_{l=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_l\partial x_k}(h(t))\Delta x_l.$$

Więc druga pochodna funkcji φ w punkcie t wynosi

$$\varphi''(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(h(t))\Delta x_l \Delta x_k.$$

Jeżeli założymy że dla ustalonej liczby naturalnej m, funkcja f ma wszystkie ciągłe pochodne cząstkowe m-tego rzędu w pewnym otoczeniu punktu x_0, to $\varphi^{(m)}(t)$ istnieje i wyraża się następującym wzorem:

$$\varphi^{(m)}(t) = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_m}(h(t))\Delta x_{k_1} \ldots \Delta x_{k_m}.$$

Ostatecznie, przy ostatnim założeniu, możemy zastosować wzór Taylora dla funkcji φ w punkcie $t = 1$ dla $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) =& \varphi(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}1^k + \frac{\varphi^{(m)}(c)}{m!}1^m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{n_1=1}^{n} \cdots \sum_{n_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{n_1} \ldots \partial x_{n_k}}(x_0)\Delta x_{n_1} \ldots \Delta x_{n_k} + \\ &+ \frac{1}{m!} \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_m}(x_0 + c(x - x_0))\Delta x_{k_1} \ldots \Delta x_{k_m}, \end{aligned}$$

dla pewnego $c \in (0, 1)$. Ostatni wzór jest tzw. wzorem Taylora dla funkcji rzeczywistej o n zmiennych a ostatni składnik w sumie, jest nazywany m-tą resztą Lagrange'a.

Na podstawie poprzedniego przykładu możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.2.5 *Niech $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \subseteq U \subseteq D_f$, gdzie U jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$. Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistę n zmiennych, tak że dla ustalonej liczby naturalnej m istnieją wszystkie ciągłe pochodne cząstkowe m-tego rzędu na zbiorze U. Niech $x \in U$, to wtedy istnieje $c \in (0, 1)$ taka że*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{n_1=1}^{n} \cdots \sum_{n_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{n_1} \ldots \partial x_{n_k}}(x_0)\Delta x_{n_1} \ldots \Delta x_{n_k} + R_m(x),$$

gdzie

$$R_m(x) = \frac{1}{m!} \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_m}(x_0 + c(x - x_0))\Delta x_{k_1} \ldots \Delta x_{k_m},$$

jest m-tą resztą Lagrange'a.

Na zakończenie podamy następujący przykład.

Przykład 5.2.6 *Obliczmy przybliżoną wartość liczby* $\sqrt{9.01 \cdot 3.99}$*. Niech będzie dana funkcja dwóch zmiennych* $f(x,y) = \sqrt{xy}$ *Obliczmy jej przybliżoną wartość stosując rozwinięcie do drugiego stopnia . Niech* $(x_0, y_0) = (9,4)$ *i* $(x,y) = (9.01, 3.99)$*,* $\Delta x = x - x_0 = 0.01, \Delta y = y - y_0 = -0.01$*. Pamiętając, że*

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(\Delta x)^2\right) + R_3(x,x_0), \end{aligned}$$

gdzie $R_3(x,x_0)$ *jest trzecią resztą Lagrange'a.*

Liczymy kolejno współczynniki dla naszego wielomianu Taylora.

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0) &= f(9,4) = \sqrt{9 \cdot 4} = 6, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{xy} = y/(2\sqrt{xy}) = (x^{-1/2}y^{1/2})/2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{xy} = x/(2\sqrt{xy}) = (x^{1/2}y^{-1/2})/2. \end{aligned}$$

Więc mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 4/(2 \cdot 6) = 1/3. \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 9/(2 \cdot 6) = 3/4.$$

Przechodzimy do pochodnych cząstkowych drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =& - x^{-3/2}y^{1/2}/4 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = -1/(2 \cdot 27) = -1/54, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy \partial y}(x,y) =& (x^{-1/2}y^{-1/2})/4 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial xy \partial y}(x_0,y_0) = 1/24, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =& - x^{1/2}y^{-3/2}/4 \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = -3/32. \end{aligned}$$

Ostatecznie, mamy

$$\begin{aligned} \sqrt{9.01 \cdot 3.99} \approx& 6 + ((1/3) \cdot 0.01 + 3/4 \cdot 0.01) + \\ &+ 1/2 \cdot (-1/54 \cdot (0.01)^2 + 2 \cdot 1/24 \cdot (0.01)^2 - 3/32 \cdot (0.01)^2) \\ =& 6.01083188657. \end{aligned}$$

5.3 Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych

Podobnie jak w przypadku rachunku różniczkowego jednej zmiennej, rachunek różniczkowy wielu zmiennych ma zastosowanie w zagadnieniach optymalnych występujących na przykład w technice, w geometrii czy też w fizyce.

Zaczniemyod definicji maksimum i minimum lokalnego funkcji rzeczywistej wielu zmiennych .

Definicja 5.3.1 (Ekstremum lokalne) *Niech $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ i U jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$. Niech $x_0 \in U$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$. Powiemy, że f ma maksimum lokalne w x_0 jeśli*

$$(\exists r > 0)(\forall x \in D) 0 < d(x, x_o) < r \longrightarrow f(x) < f(x_0),$$

tutaj r jest takie, że $B(x_0, r) \subseteq U$. Podobnie, powiemy że f ma minimum lokalne w x_0 jeżeli

$$(\exists r > 0)(\forall x \in D) 0 < d(x, x_o) < r \longrightarrow f(x_0) < f(x).$$

Jeżeli zachodzi przynajmniej jeden z tych warunków, to wtedy f posiada ekstremum lokalne w x_0.

Powiemy, że funkcja f ma maksimum globalne w punkcie x_0 jeżeli

$$(\forall x \in D)\ x \neq x_0 \longrightarrow f(x) < f(x_0).$$

Analogicznie definiujemy minimum globalne oraz ekstremum lokalne w x_0.

Zauważmy, że jeśli f ma maksimum globalne w x_0, to też posiada maksimum lokalne w x_0. Analogicznie mamy podobną sytuację w przypadku minimum i ekstremum funkcji.

Przykład 5.3.1 *Niech $f(x, y) = x^2 + y^2$, to dla każdego $\bar{x} = (x, y) \neq (0, 0)$ mamy*

$$f(0, 0) = o < x^2 + y^2 = f(x, y).$$

Więc nasza f ma minimum globalne (a więc i lokalne) w punkcie $(0, 0)$.

Przykład 5.3.2 (funkcja siodłowa) *Niech $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\bar{x_0} = (0, 0)$. To funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w $(0, 0)$. Aby się o tym przekonać wystarczy znaleźć ciągi*

$$\bar{x}_n = \left(\frac{1}{n+1}, 0\right) \text{ oraz } \bar{y}_n = \left(0, \frac{1}{n+1}\right)$$

określone dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = (0, 0) = \lim_{n\to\infty} \bar{y}_n.$$

Więc dla każdego $r > 0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\bar{x}_n, \bar{y}_n \in B((0, 0), r)$ i

$$f(\bar{y}_n) = f\left(0, \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{(n+1)^2} < 0 = f(0, 0) < \frac{1}{(n+1)^2} = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f(\bar{x}_n).$$

Dobrze wiemy, że w rachunku różniczkowym funkcji jednej zmiennej prawdziwy jest warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego. Warunek ten mówi nam, że jeśli f ma ekstermum lokalne w $x_0 \in \mathbb{R}$ i f ma pochodną w x_0, to $f'(x_0) = 0$. Okazuje się, że analogiczny warunek zachodzi w przypadku funkcji rzeczywistych wielu zmiennych.

Twierdzenie 5.3.1 (Warunek konieczny istnienia ekstramum) *Jeżeli $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ i U jest otwarty w $\mathbb{R}^n$. Jeżeli $x_0 \in U$ i $f : D \to \mathbb{R}$ jest taka, że*

1. *f ma ekstremum lokalne w x_0,*
2. *dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ istnieje, to*

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0,$$

lub krócej $\nabla f(x_0) = \bar{0}$.

Dowód. *Niech $i \in \{1, \ldots, n\}$, to jest $r > 0$ takie, że dla kazdego $t \in (-r, r)$ $x_0 + te_i \in U$. Wtedy definiujemy funkcję $\varphi_i : (-r, r) \to \mathbb{R}$ następującym wzorem:*

$$(\forall t \in (-r, r))\ \varphi_i(t) = f(x_0 + te_i),$$

tutaj e_i jest i-tym wektorem bazy standardowej w $\mathbb{R}^n$. Ponieważ z załozenia istnieje i-ta pochodna cząstkowa funkcji f w x_0, to wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_i(t) - \varphi_i(x_0)}{t - 0}.$$

Więc $\varphi_i'(0)$ istnieje i jest równa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. Zauważmy, że jeśli f ma maksimum lokalne x_0, to oczywiście z definicji, φ_i też ma maksimum lokalne w 0 (analogicznie mamy też w przypadku minimum lokalnego). Więc z warunku koniecznego o istnieniu ekstremum lokalnym dla funkcji φ_i mamy $\varphi_i'(0) = 0$ a stąd

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \varphi_i(0) = 0.$$

Wobec dowolnści wyboru i ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$ mamy tezę twierdzenia. ■

Zauważmy, że z naszego warunku koniecznego istnienia ekstremum mamy taki fakt: jeśli f ma wszystkie pochodne cząstkowe w x_0 ale nie wszystkie równe zeru, to f nie ma ekstremum lokalne w punkcie x_0.

Powiemy, że punkt x_0 jest punktem stacjonarnym dla funkcji f jeżeli $\nabla f(x_0) = \bar{0}$.

Jeśli ponownie rozważymy funkcję z Przykładu 5.3.1 zadanej wzorem $f(x, y) = x^2 + y^2$, to rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y^2) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 + y^2) & = & 0 \end{cases}$$

mamy $x = 0$ i $y = 0$. Punkt $(0, 0)$ jest jedynym punktem stacjonarnym dla funkcji f. Więc w każdym innym punkcie niż $(0, 0)$ funkcja f nie ma ekstremum lokalnego. Jedynym punktem w którym$f$ ma ekstremum lokalne to $(0, 0)$ i f ma w nim maksimum nawet globalne.

Analizując funkcję z drugiego przykładu, gdzie $f(x, y) = x^2 - y^2$ widzimy, że f nie ma żadnym punkcie ekstremum lokalne.

Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, istnieje warunek wystarczajacy na istnienie ekstremum lokalne funkcji wielu zmiennych. Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, w dowodzie wykorzystuje się rozwinięciw Taylora z drugą resztą Lagrange'a ale ponadto potrzebna jest dodatnia określoność macierzy symetrycznej.

Niech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ będzie ustaloną macierzą kwadratową, to A jest macierzą symetryczną, jeżeli $A^T = A$, gdzie A^T jest macierzą transponowaną. Powiemy, że nasza symetryczna macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest dodatnio określona (co oznaczamy przez $A > 0$) jeżeli

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n) x \neq \bar{0} \longrightarrow (Ax, x) > 0,$$

gdzie $(\cdot, \cdot)$ jest zwykłym iloczynem skalarnym, tj. $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Natomiast A jest ujemnie określona, jeżeli macierz $-A$ jest dodatnio określona i wtedy warunek ten oznaczamy przez $A < 0$.

Prawdziwe jest następujace twierdzenie.

Twierdzenie 5.3.2 *Jeżeli $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest symetryczną macierzą, to*

1. *$A > 0$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall k \in \{1, \ldots, n\}) \;\; det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0,$$

2. *$A < 0$ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(\forall k \in \{1, \ldots, n\}) \;\; (-1)^k \cdot det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0.$$

Przejdźmy teraz do warunku wystarczającego na ekstrema lokalne.

Twierdzenie 5.3.3 *Niech $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ i U jest otwarty w $\mathbb{R}^n$. Jeżeli $x_0 \in U$ i $f : D \to \mathbb{R}$ jest taka, że*

1. *wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu istnieją i są ciągłe na zbiorze U,*

2. *$\nabla f(x_0) = \bar{0}$,*

to wtedy przyjmując za $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$ dla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mamy

- *jeżeli $(\forall k \in \{1, \ldots, n\})$ $det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$, to f ma minimum lokalne w x_0,*

- *jeżeli* $(\forall k \in \{1,\ldots,n\})$ $(-1)^k \cdot det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$, *to* f *ma minimum lokalne w* x_0.

Dowód. *Ponieważ funkcja ma wszystkie ciągłe pochodne cząstkowe w otoczeniu* U *punktu* x_0. *to możemy zastosować rozwinęcie Taylora naszej funkcji z drugą resztą Lagrange'a. Niech* $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Delta x_i = x_i - x_i^0$. *Wtedy dla każdego* $x \in U$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + t(x - x_0))\Delta x_i \Delta x_j$$

Ponieważ założyliśmy, że $\nabla f(x_0) = \bar{0}$, *to otrzymujemy*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + t(x - x_0))\Delta x_i \Delta x_j.$$

Pamiętając postać macierzy A *możemy zdefiniować analogicznie macierz* $A(y)$ *w* $u \in U$ *tak, że*

$$[A(y)]_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(y)$$

Wtedy $A = A(x_0)$ *i dla każdego* $y \in U$ *mamy*

$$\big(A(y)(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n), (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(y)\Delta x_i \Delta x_j$$

Załóżmy, że $A = A(x_0)$ *jest macierzą dotanio określoną. To z założenia, że wszystkie* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *są ciągłymi funkcjami na zbiorze otwartym* U *istnieje takie* $r > 0$ *takie, że* $B(x_0, r) \subseteq U$ *i dla każdego* $y \in B(x_0, r)$ $A(y) > 0$. *Ponieważ kula* $B(x_0, r)$ *jest wypukła, to dla każdych* $x \in B(x_0, r)$, $t \in [0,1]$ $x_0 + t(x - x_0) \in B(x_0, r)$. *Więc dla kazdego* $x \in B(x_0, r)$ *i każdego* $t \in [0,1]$ *mamy*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + t(x - x_0))\Delta x_i \Delta x_j > 0$$

Stąd dla $x \in B(x_0, r)$ *i* $x \neq x_0$ *mamy*

$$f(x) > f(x_0).$$

Wobec dowolności wyboru $x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ *wnosimy, że* f *ma minimum lokalne w* x_0.

Analogicznie rozumując, jeżeli $A = A(x_0) < 0$, *to* f *ma maksimum lokalne w* x_0. ■

Przykład 5.3.3 *Niech* $f(x, y) = (x - y + 1)^2 + (2x + y - 4)^2$. *Wpierw szukamy punktów stacjonarnych. Mamy*

$$f'_x(x, y) = 2(x - y + 1) + 4(2x + y - 4) = 2(5x + y - 7) = 10x + 2y - 14,$$

$$f'_y(x,y) = -2(x-y+1) + 2(2x+y-4) = 2(x+2y-5) = 2x+4y-10$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = & 0 \\ f'_y(x,y) = & 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 2(5x+y-7) = & 0 \\ 2(x+2y-5) = & 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = & 1 \\ y = & 2 \end{cases}.$$

Więc $x_0 = (1,2)$ *jest jedynym punktem stacjonarnym dla funkcji* f*. Teraz policzmy macierz drugich pochodnych (zwaną też hesjanem).*

$$f''_{xx}(x,y) = 10, \;\; f''_{xy}(x,y) = 2,$$

$$f''_{yx}(x,y) = 2, \;\; f''_{yy}(x,y) = 4$$

Więc nasza macierz A *drugich pochodnych w* $x_0 = (1,2)$ *jest następująca*

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że

$$10 > 0 \text{ oraz } \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 36 > 0.$$

Więc $A > 0$ *a stąd wiemy, że* f *ma minimum lokalne w punkcie* $x_0 = (1,2)$ *oraz innych ekstremów lokalnych funkcja* f *nie ma.*

Definicja 5.3.2 (Ekstremum warunkowe) *Niech* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ *i* $x \in U$. *Niech* $m \in \mathbb{N}$ *i* $G : U \to \mathbb{R}^m$, *to* f *ma maksimum warunkowe w* x *przy warunku* $G(x) = \bar{0}$ *jeżeli*

- $G(x) = \bar{0}$,
- *istnieje* $r > 0$ *takie, że* $B(x,r) \subseteq U$ *oraz*

$$(\forall y \in \mathbb{R}^n)\; (0 < d(x,y) < r \wedge G(y) = \bar{0}) \longrightarrow f(y) < f(x).$$

Analogicznie definiujemy minimum warunkowe. Jeżeli funkcja f *ma maksimum warunkowe lub minimum warunkowew* x*, to mówimy, że* f *ma ekstremum warunkowe w* x *(przy warunku* $G(x) = \bar{0}$.

5.3.1 Metoda elementarna wyznaczania ekstremów warunkowych

Pokażemy na załączonym przykładzie jak można wyznaczać ekstremum warunkowe.

Przykład 5.3.4 *Niech będzie dana funkcja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *określona wzorem* $f(x, y) = x^2+y^2$ *chcemy znaleźć ekstremum warunkowe tej funkcji przy zadanym warunku* $x^2 + 2x + y^2 = 1$. *Niech* $G(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 1$.

W celu wyznaczenia ekstremum lokalnego spróbujemy w równaniu $G(x, y) = 0$ *wyodrębnić zmienną* y.

Mamy więc dwa przypadki $y = \sqrt{1 - x^2 - 2x}$ *lub* $y = -\sqrt{1 - x^2 - 2x}$. *Zauważmy, że* $0 \leq 1 - x^2 - 2x = 2 - (x^2 + 2x + 1) = 2 - (x + 1)^2$, *a stąd* $-\sqrt{2} - 1 \leq x \leq \sqrt{2} - 1$.

Niech

$$\begin{aligned} M =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ G(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x + y^2 - 1 = 0\} \\ =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x + 1)^2 + y^2 = 2\}. \end{aligned}$$

Tak więc nasz zbiór M *na którym szukamy ekstremum jest okręgiem o środku w* $(-1, 0)$ *i promieniu* $\sqrt{2}$. *Okrąg nasz rozbijamy na dwa podzbiory* $M = M_+ \cup M_-$, *gdzie*

$$M_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1] \wedge y = \sqrt{1 - x^2 - 2x}\}$$

$$M_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1] \wedge y = -\sqrt{1 - x^2 - 2x}\}.$$

Definiujemy

$$g_+(x) = f(x, \sqrt{1 - x^2 - 2x}) = x^2 + (1 - x^2 - 2x) = -2x + 1$$

i

$$g_-(x) = f(x, -\sqrt{1 - x^2 - 2x}) = x^2 + (1 - x^2 - 2x) = -2x + 1 = g_+(x).$$

na odcinku $[-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1]$. *Następnie, szukamy ekstremów lokalnych dla funkcji* g_+ *(funkcja* g_- *jest identyczna z* g_+*). Z warunku koniecznego* $0 = g_+'(x) = (2x + 1)' = 2$ *widzimy, że* g_+ *nie ma ekstremum lokalnego na przedziale otwartym* $(-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$. *Więc jedynymi punktami, w którym* f *może przyjąć ekstremum lokalne są* $(-\sqrt{2} - 1, 0) \in M$, $(\sqrt{2} - 1, 0) \in M$. *Ponieważ okrąg* M *jest zbiorem domkniętym i ograniczonym w* $\mathbb{R}^2$ *a więc zwarty, to* f *przyjmuje wartości największe i najmniejssze na tym zbiorze. Jedynymi punktami, w których funkcja może osiągnąć wspomniane wartości na* M *są właśnie punkty* $(-\sqrt{2}-1, 0), (\sqrt{2}-1, 0)$. *Ponieważ* $f(-\sqrt{2}-1, 0) = 2+2\sqrt{2}$ *i* $f(\sqrt{2}-1, 0) = 2-2\sqrt{2}-1 = 1 - 2\sqrt{2}$, *to funkcja* f *ma maksimum warunkowe w punkcie* $(-\sqrt{2} - 1, 0)$ *a minimum warunkowe w* $(\sqrt{2} - 1, 0)$.

Rozważmy teraz trójwymiarowy przypadek.

Przykład 5.3.5 *Wyznacz ekstrema warunkowe* $f(x, y) = x^2 - y^2 + z^2 + 1$, *gdy*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

Zauważmy, że $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge x^2 - 2x + y^2 = 2\}$ *jest częścią wspólną sfery o środku* $(0, 0, 0)$ *i promieniu* $R = 2$ *i walca o promieniu* $R_W = 1$ *i o osi równoległej do osi* z *przechodzącej przez* $(1, 0, 0)$.

spróbujemy rozwikłać dwa warunki definiujące nasz zbiór M:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = & 4 \\ x^2+y^2-2x = & 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} z^2 = & 4-x^2-y^2 \\ y^2 = & 2x-x^2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} z^2 = & 4-x^2-2x+x^2 = 4-2x \\ y^2 = & 2x-x^2 \end{cases}.$$

Widzimy, że $4-2x \geq 0$ i $0 \leq 2x-x^2 = x(2-x)$, co jest spełnione jedynie dla $x \in [0,2]$. Podstawiając za y i z pierwiastki prawych stron powyższego układu równań i wstawiając je do funkcji f otrzymujemy cztery funkcje zmiennej x na przedziale $[0,2]$,

$$h(x) = f(x, \pm\sqrt{2x-x^2}, \pm\sqrt{4-2x}) = x^2 - (2x-x^2) + (4-2x) + 1 = 2x^2 - 4x + 5,$$

które w naszym przypadku są identyczne. Szukamy ekstremów lokalnych funkcji h na przedziale $(0,2)$:

$$0 = h'(x) = 4x - 4 \longleftrightarrow x = 1.$$

Ponieważ $h``(x) = 4 > 0$, to h ma minimum lokalne w $x = 1$. Więc funkcja f ma minima warunkowe w punktach $(1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$. Pozostałe ekstrema warunkowe funkcji f mogą być w punktach takich, że $x = 0$ lub $x = 2$, tj. $(0,0,\pm 2)$, $(2,0,0)$. Zauważmy, że $f(1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = 2$ i $f(0,0,\pm 2) = f(2,0,0) = 5$, więc f ma maksimum warunkowe w punktach $(0,0,\pm 2)$, $(2,0,0)$.

5.3.2 Wartości największe i najmniejsze na zbiorze zwartym

Na mocy twierdzenia Weierstrassa wiemy, że każda funkcja ciągła na zwartym podzbiorze przestrzeni euklidesowej jest ograniczona i przyjmje wartość największą i najmniejszą. Dla funkcji, które mają pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na pewnym zbiorze otwartym zawierającym nasz zwarty podzbiór możemy zastosować algorytm wyznaczania tych wartości.
Algorytm wyznaczania wartości największej i najmniejszej *Niech $D \subseteq U \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$, U otwarty, D zwarty w $\mathbb{R}^n$ (tj. domknięty i ograniczony), $f : W \to \mathbb{R}$ funkcja ciągła posiadająca wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na zbiorze U. Wtedy*

1. *wyznaczamy zbiór punktów stacjonarnych we wnętrzu zbioru D*

$$A = \{x \in int(D) : \ \nabla f(x) = 0\}$$

2. *wyznaczamy zbiór B wszystkich punktów na brzegu zbioru D, w których funkcja f ma ekstrema warunkowe oraz takich które są końcami przedziałów które parametryzują brzeg zbioru D,*

3. *tworzymy zbiór $Z = A \cup B$,*

4. *jesli Z jest zbiorem skończonym, to wyznaczamy f_{max}, f_{min}*

$$f_{max} = \max\{f(x) : \ x \in Z\}, \quad f_{min} = \min\{f(x) : \ x \in Z\}.$$

5. *f_{max} jest szukaną wartością maksymalną funkcji f na zbiorze D a f_{min} wartością minimalną.*

Jeżeli f nie posiada w pewnych punktach zbioru D pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu, to te punkty dołączamy do zbioru Z.

Przykład 5.3.6 *Wyznaczmy wartość największą i najmniejsza funkcji $f(x,y) = x^2 - 6y^2 + 2$ na zbiorze*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| \leq 1\}.$$

Oczywiście D jest zbiorem domkniętym i ograniczonym na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Szukamy punktów stacjonarnych we wnętrzu D:

$$int(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| < 1\}.$$

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = & 0 \\ f'_y(x,y) = & 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 2x = & 0 \\ -6y = & 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = & 0 \\ y = & 0 \end{cases}$$

Więc $A = \{(0,0\}$ jest jednoelementowym zbiorem punktów stacjonarnych we wnętrzu zbioru D.

Teraz zajmiemy się ekstremami warunkowymi funkcji f na brzegu zbioru D. Zauważmy, że

$$bd(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| = 1\}.$$

Rozważamy cztery przypadki, mianowicie dla $(x,y) \in bd(D)$ zachodzi warunek

$$(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \geq 0 \wedge x < 0) \wedge (x < 0 \wedge y \geq 0) \wedge (x < 0 \wedge y < 0).$$

dla $x, y \geq 0$ mamy $x+y = 1$ a stąd $0 \leq y = 1-x$ a więc $0 \leq x \leq 1$ i $y = 1-x$. Definiujemy

$$h_1(x) = f(x, 1-x) = x^2 - 6(1-x)^2 + 2, \ \ dla \ x \in [0,1].$$

Dalej, $0 \leq x$ i $y < 0$, wtedy $y = x - 1$ i $h_2(x) = f(x, x-1) = x^2 - 6(x-1)^2 + 2 = h_1(x)$ na przedziale $[0,1]$, $h_3(x) = h_4(x) = h_1(x) = x^2 - 6(1-x)^2 + 2$ na przedzale $[-1,0]$.

Więc stosując warunek konieczny dla funkcji h_1, mamy

$$0 = h'_1(x) = 2x - 12(x-1) = -10x + 1 \longrightarrow x = \frac{1}{10} \in [0,1]$$

i $h''_1(x) = 10 > 0$, więc h_1 ma minimum lokalne w $x = \frac{1}{10}$. Więc f ma brzegu zbioru D ma minimum lokalne w $(\frac{1}{10}, \pm\frac{9}{10}$. Pozostały punkty na wierzchołkach brzegu kwadratu D tj. $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$. Ostatecznie zbiór Z jest postaci

$$Z = \left\{(0,0), \left(\frac{1}{10}, \pm\frac{9}{10}\right), \ (\pm 1, 0), \ (0, \pm 1)\right\}.$$

Więc

$$\{f(x,y) : (x,y) \in Z\} = \left\{2, \frac{1}{100} - 6\frac{81}{100} + 2, 1+2, -6+2\right\}$$

Więc 3 jest największą a liczba -4 jest najmniejszą wartością funkcji f na zbiorze D.

5.4 Twierdzenie o funkcji odwrotnej i funkcje uwikłane

Jednym z zastosowań twierdzenia Banacha o punkcie stałym jest twierdzenie o funkcji odwrotnej. Właśnie korzystając z twierdzenia o funkcji odwrotnej, można udowodnić twierdzenie o istnieniu fukcji uwikłanej o którym będzie mowa w tym rozdziale.

Przejdźmy więc do sformułowania twierdzenia o funkcji odwrotnej.

Twierdzenie 5.4.1 (O funkcji odwrotnej) *Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_0 \in U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$, U-otwarty. Załóżmy, że $f : D \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją, taką, że*

1. *wszystkie pochodne czastkowe pierwszego rzędu istnieją i są ciągłe na zbiorze otwartym U,*
2. *jakobian $J_f(x_0)$ jest macierzą nieosobliwą.*

Wtedy istnieją zbiory otwarte $U_1 \subseteq U$, i $W \subseteq \mathbb{R}^n$ takie, że

- *f jest bijekcją pomiędzy U_1 a W,*
- *istnieje $g : W \to U_1$, które jest odwrotna do $f \restriction U_1$, różniczkowalna na W,*
- *dla każdych $x \in U_1$, $y \in W$ jeżeli $y = f(x)$, to $J_g(y) = (J_f(x))^{-1}$.*

. Dowód tego twierdzenia znajduje się w appendiksie 7.5.

Zacznijmy od definicji funkcji uwikłanej.

Definicja 5.4.1 (Funkcja uwikłana) *Niech $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $f : D \to \mathbb{R}^k$, $(x_0, y_0) \in U$ i $f(x_0, y_0) = \bar{0} \in \mathbb{R}^k$. Powiemy, że funkcja h jest funkcją uwikłaną równania $f(x, y) = \bar{0}$ w otoczeniu (x_0, y_0), jeżeli istnieje $r > 0$ takie, że $h : B(x_0, r) \to \mathbb{R}^m$ i*

$$(\forall x \in B(x_0, r))\ f(x, h(x)) = \bar{0}.$$

Przykład 5.4.1 *Niech $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, wtedy równanie $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (czyli $f(x, y) = 0$), można rozwikłać wzglęm zmiennej y jako*

$$y = \sqrt{1 - x^2} \text{ albo } y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Tak więc, jeżeli punkt (x_0, y_0) jest taki, że $x_0 \in (-1, 1)$ a $y_0 > 0$, to widzimy, że funkcja $h : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ zdefiniowana jako $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$ jest funkcją uwikłaną równania $x^2 + y^2 - 1 = 0$ w otoczeniu (x_0, y_0). Zauważmy, że taka funkcja jest jedyna na przedziale $(-1, 1)$ i jest różniczkowalna.

Natomiast, jeżeli rozważymy punkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$, to oczywiście $f(x_0, y_0) = 0$ ale istnieją dwie funkcje uwikłane $h_+, h_- : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ równania $f(x, y) = 0$ w przedziale $(-1, 1]$,

$$h_+(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ oraz } h_-(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Zachodzi następujące twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności funkcji uwikłanej.

Twierdzenie 5.4.2 (O funkcji uwikłanej) *Niech* $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{m+n}$ *i* $(x_0, y_0) \in U$ *i* U *jest otwarty w* $\mathbb{R}^{m+n}$. *Niech* $f : D \to \mathbb{R}^m$ *taka, że:*

1. $f(x_0, y_0) = \bar{0}$,
2. *wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu istnieją i są ciągłe na zbiorze otwartym* U,
3. $$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+m}}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+m}}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

to istnieje $r > 0$, *i jedyna funkcja* $h : B(x_0, r) \to \mathbb{R}^m$ *taka, że dla każdego* $x \in B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ $f(x, h(x)) = \bar{0} \in \mathbb{R}^m$. *Ponadto, jeżeli* $m = n = 1$, *to* h *jest funkcją jednej zmiennej oraz*

$$h'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *i funkcja* f, *który spełnia warunki* $1) - 3)$ *nazywamy* **punktem regularnym** *względem funkcji* f, *lub krótko punktem regularnym jeśli wiemy o jaką funkcję nam chodzi.*

Dowód. *Niech* $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *zdefiniowaną następująco:*

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n \in (x, y) \to H(x, y) = (x, f(x, y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

Oczywiście funkcja H *ma wszystkie pochodne cząstowe ciągłe w otoczemiu punktu* (x_0, y_0). *Możemy rozpisać naszą funkcję* $H(x, y)$ *bardziej detalicznie:*

$$H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

Stąd jakobian przekształcenia H *w* (x, y) *jest następujący:*

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial x_n}(x, y) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & 0 \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n}(x, y) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(x, y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & 0 \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x, y) & \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ A & B(x, y) \end{pmatrix}$$

gdzie

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+m}}(x, y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+1}}(x, y) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+m}}(x, y) \end{pmatrix}$$

Więc $det(J_H(x_0, y_0)) = det(B(x_0, y_0)) \neq 0$. *Zatem, funkcja* H *spełnia założenia Twierdzenia 5.4.1 o funkcji odwrotnej. Więc istnieją zbiory otwarte* $U, W \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ *takie, że* $(x_0, y_0) \in U$ $H(x_0, y_0) \in W$ *i* $H \restriction U : U \to W$ *jest bijekcją pomiędzy* U *i* W *i istnieje funkcja różniczkowalna* $G : W \to U$, *która jest funkcją odwrotną do funkcji* $H \restriction U$. *Niech* $G(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)$ *dla* $(x, y) \in W$*Mamy więc dla dowolnego* $(x, y) \in W$

$$(x, y) = H \circ G(x, y) = H(g_1(x, y), g_2(x, y)) = (g_1(x, y), f(g_1(x, y), g_2(x, y))$$

a stąd $x = g_1(x, y)$ *i* $y = f(x, g_2(x, y))$. *Niech* $(x, y) \in U$ *i* $f(x, y) = 0$, *to mamy*

$$H(x, y) = (x, f(x, y)) = (x, 0) \in W = H[U]$$

a więc

$$(x, y) = G(x, 0) = (g_1(x, 0), g_2(x, 0)).$$

W końcu otrzymujemy $y = g_2(x, 0)$ *i definiujemy funkcję* $h(x) = g_2(x, 0)$ *dla takich* x, *że* $(x, 0) \in W$. *Korzystając z równości* $y = f(x, g_2(x, y))$, *podstawiając* $y = 0$ *mamy*

$$f(x, h(x)) = f(x, g_2(x, 0)) = 0.$$

Funkcja h *jest funkcją uwikłaną równaniem* $f(x, y) = 0$ *w pewnym otoczeniu punktu* x_0. *Zuważmy, że funkcja* G *jest różniczkowalna na* W *a więc również* g_2 *jest różniczkowalną funkcją w otoczeniu* x_0 *a stąd sama funkcja* h *jest różniczkowalna (a więc też ciągła) w pewnym otoczeniu punktu* x_0.

Przejdźmy teraz do sytuacji dwuwymiarowej, tzn. $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ *i* U *jest zbiorem otwartym. W takim razie istnieje* $r > 0$ *i różniczkowalna funkcja* $h : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ *na przedziale* $(x_0 - r, x_0 + r)$ *taka, że* $y_0 = h(x_0)$ *i dla każdego* $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ $f(x, h(x)) = 0$. *W takim razie funkcja* $f(x, h(x))$ *jest funkcją stałą na naszym odcinku otwartym a stąd*

$$0 = (f(x, h(x))) \;= f'_x(x, y)\frac{\partial x}{\partial x}(x, y) + f'_y(x, y) \cdot h'(x),$$

więdząc, że $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, *to też w perwnym otoczeniu* $U_0 \subseteq U$ *punktu* (x_0, y_0) *mamy* $f'_y(x, y) \neq 0$. *W takim razie, pomniejszając odpowiednio* r *do pewnej liczby dodatniej mamy*

$$h'(x) = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}, \text{ dla każdego } (x, y) \in U_0.$$

■

Wróćmy na chwilę do Przykładu 5.4.1, jeżeli $x_0 \in (-1, 1)$ *i* $x_0^2 + y^2 = 1$, *to* $y_0 \neq 0$ *i* $f'y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$ *a więc spełnione są założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej. Wtedy w pewnym otoczeniu punktu* x_0 *istnieje jedyna funkcja uwikłana równania* $f(x, y) = 0$. *W przypadku, gdy* $x_0 = -1$ *lub* $x_0 = 1$, *to wtedy* $f'_y(x_0, y_0) = 0$ *i są dwie funkcje uwikłane dla równania* $f(x, y) = 0$.

Niech f będzie funkcją dwóch zmiennych która spełnia założenia Twierdzenia 5.4.2. Ponadto, załóżmy, że pochodne drugiego rzędu istnieją i sa ciągłe na zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Niech $h : (x_0, r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją uwikłaną równaniem $f(x, y) = 0$. Wtedy funkcja jednej zmiennej $f(x, h(x))$ jest stale równa zeru na $(x_0 - r, x_0 + r)$. Dla $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, $y = h(x)$ mamy więc

$$0 = (f(x, h(x)))' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h'(x) = f'_x(x, h(x)) + f'_y(x, h(x)) \cdot h'(x).$$

Następnie,

$$\begin{aligned} 0 =&(f'_x(x, h(x)) + f'_y(x, h(x)) \cdot h'(x))' = (f'_x(x, h(x)))' + (f'_y(x, h(x)) \cdot h'(x))' \\ =&(f'_x(x, h(x)))' + (f'_y(x, h(x)))' \cdot h'(x) + f'_y(x, h(x)) \cdot h''(x) \\ =&f''_{xx}(x, h(x)) + f''_{yx}(x, h(x)) \cdot h'(x)+ \\ &+ (f''_{xy}(x, h(x)) + f''_{yy}(x, h(x)) \cdot h'(x)) \cdot h'(x) + (f'_y(x, h(x))) \cdot h''(x). \end{aligned}$$

Pamietając, że $y = h(x)$ mamy

$$0 = f''_{xx}(x, y) + f''_{xy}(x, y) \cdot h'(x) + f''_{xy}(x, y) \cdot h'(x) + f''_{yy}(x, y) \cdot (h'(x))^2 + f'_y(x, y) \cdot h''(x).$$

Więc mamy

$$h'(x) = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

oraz

$$h''(x) = -\frac{f''_{xx}(x, y) + 2f''_{xy}(x, y) \cdot h'(x) + f''_{yy}(x, y) \cdot (h'(x))^2}{f'_y(x, y)}$$

a stąd, zakładając, że $f'_y(x, y) \neq 0$ mamy

$$h''(x) = -\frac{f'_{xx}(x, y)(f'_y(x, y))^2 - 2f''_{xy}(x, y)f'_x(x, y)f'_y(x, y) + f''_{yy}(x, y)(f'_x(x, y))^2}{(f'_y(x, y))^3}.$$

Korzystając z warunku wystarczającego na istnienie ekstremum lokalne w x_0 dla funkcji jednej zmiennej, mamy jeżeli $h'(x_0) = 0$ i $h''(x_0) \neq 0$, to h ma ekstremum lokalne w x_0. Ponadto, jeśli $h''(x_0) > 0$ to h ma minimum lokalne a jeśli $h''(x_0) < 0$, to funkcja h ma maksimum lokalne w x_0. Wtedy mamy

$$0 = h'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)},$$

$$h''(x_0) = -\frac{f''_{xx}(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

W takim razie, możemy sformułować dwa twierdzenia o ekstremum lokalnym dla funkcji uwikłanej funkcją dwóch zmiennych.

Twierdzenie 5.4.3 (Warunek konieczny istnienia ekstremum) *Niech $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$ i U jest otwarty w $\mathbb{R}^2$. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ i $(x_0, y_0) \in U$ takie, że*

1. *istnieją wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu i są ciągłe na zbiorze U,*
2. *$f(x_0, y_0) = 0$,*
3. *$f'_y(x_0, y_0) \neq 0$,*
4. *dla pewnego $r > 0$, funkcja uwikłana $h : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ równania $f(x, y) = 0$ ma ekstremum lokalne w x_0,*

to $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Twierdzenie 5.4.4 (Warunek wystarczający istnienia ekstremum) *Niech $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$ i U jest otwarty w $\mathbb{R}^2$. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ i $(x_0, y_0) \in U$ takie, że*

1. *wszystkie pochodne pierwszego i drugiego rzędu funkcji f istnieją i są ciągłe na zbiorze U,*
2. *$f(x_0, y_0) = 0$,*
3. *$f'_x(x_0, y_0) \neq 0$ i $f'_y(x_0, y_0) = 0$,*
4. *$A = -\frac{f''_{xx}(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)} \neq 0$,*

to wtedy istnieje $r > 0$ i funkcja $h : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ $f(x, h(x)) = 0$ i

1. *jeżeli $A < 0$, to h ma maksimum lokalne w x_0,*
2. *jeżeli $A > 0$, to h ma minimum lokalne w punkcie x_0.*

Przykład 5.4.2 *Wyznaczmy ekstrema lokalne funkcji uwikłanej równaniem $x^2+y^2-xy-2-4y = 0$. Przyjmujemy $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 2 - 4y$. Rozwiązujemy układ równań*

$$\begin{cases} f(x,y) = & 0 \\ f'_x(x,y) = & 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - xy - 2 - 4y & = & 0 \\ 2x - y - 2 & = & 0 \end{cases}$$

a stąd mamy

$$P_1 = (x, y) = (6 - \sqrt{26}, 10 - 2\sqrt{26}), \quad P_2 = (x, y) = (6 + \sqrt{26}, 10 + 2\sqrt{26}).$$

Liczymy $A_i = -\frac{f''_{xx}(P_i)}{f'_y(P_i)}$ dla $i \in \{1, 2\}$:

$$A_1 = -\frac{2}{10 - 3\sqrt{26}} > 0, \quad A_2 = -\frac{2}{10 + 3\sqrt{26}} < 0.$$

Więc funkcja uwikłana równaniem $x^2+y^2-xy-2-4y = 0$ ma minimum lokalne w punkcie $x_1 = 6 - \sqrt{26}$ i maksimum lokalne w punkcie $x_2 = 6 + \sqrt{26}$.

Jeszcze raz napiszmy pochodną funkcji uwikłanej h w równaniu $f(x,y)=0$ w punkcie (x_0,y_0)

$$h'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}.$$

Stąd możemy napisać równanie stycznej do wykresu $M=\{(x,y): f(x,y)=0\}$ w punkcie $(x_0,y_0)\in U$

$$y-y_0 = -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}(x-x_0),$$

lub też tak

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0.$$

5.5 Metoda mnożników Lagrange'a

Przypomnijmy równanie prostej stycznej do funkcji uwikłanej równaniem dwóch zmiennych rzeczywistych $f(x,y)=0$ w punkcie regularnym (x_0,y_0) (gdzie $f(x_0,y_0)=0$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0.$$

Widzimy, że $\nabla f(x_0,y_0)$ jest wektorem prostopadłym do stycznej do zbioru M w punkcie (x_0,y_0).

Podobna analiza dla funkcji $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ prowadzi nas do wniosku, że jeżeli funkcja f spełnia założenia Twierdzenia 5.4.2 o istnieniu funkcji uwikłanej równaniem $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ w punkcie $\bar{x}_0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)\in M$, gdzie $M=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^n:\ f(\bar{x})=0\}$, to gradient $\nabla f(\bar{x}_0)$ jest prostopadły do hiperpłaszczyzny stycznej do M w punkcie $\bar{x}_0$.

Niech $c\in\mathbb{R}$, punkt $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$ i $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ będą takie, że

1. *$f(\bar{x}_0)=c$,*
2. *$\bar{x}_0$ punktem regularnym względem funkcji f,*

to zbiór

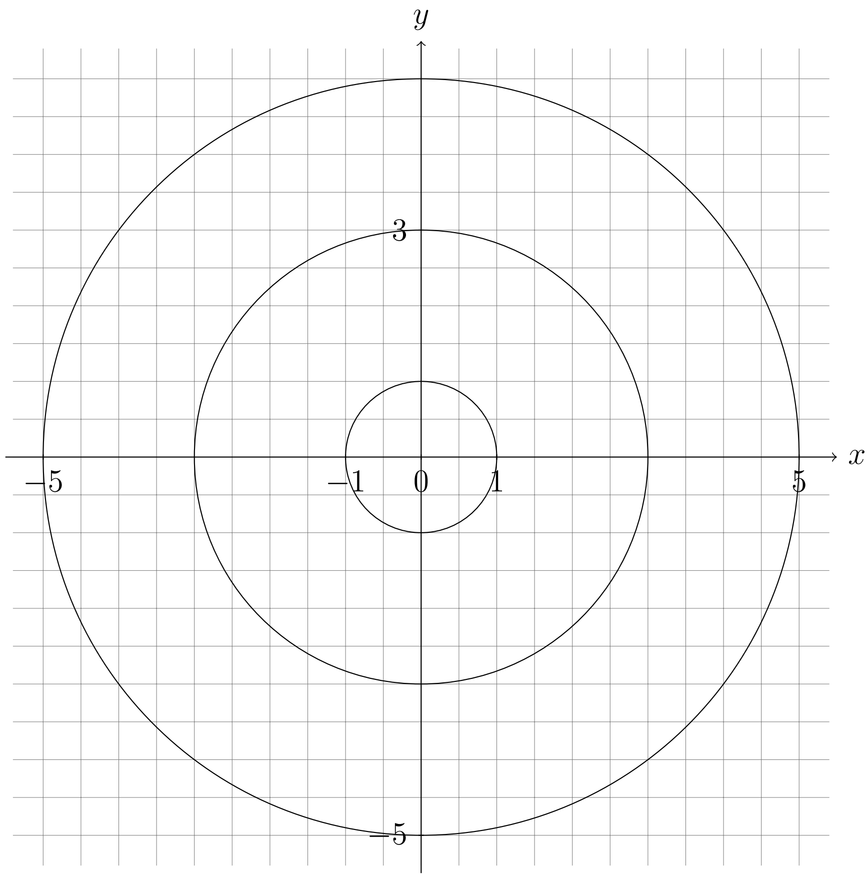
$$f^{-1}[\{c\}] = \{x\in\mathbb{R}^n : f(x)=c\}$$

nazywamy poziomicą funkcji f i wtedy na podstawie poprzedniego akapitu gradient $\nabla f(x_0) = \nabla(f-c)(x_0)$ jest wektorem prostopadłym do poziomicy $f^{-1}[\{c\}]$ w punkcie $\bar{x}_0$.

Przykład 5.5.1 *Niech $f(x,y)=x^2+y^2$ i $c=25$, to pozimica ma następująca postać*

$$f^{-1}[\{c\}] = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=c\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ s^2+y^2=25=5^2\},$$

a więc jest okręgiem o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu $r=5$. Na poniższym rysunku znajdują się trzy poziomice funkcji f, dla $c=1,3,5$..



Załóżmy, że $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ *i* U *jest otwarty, mamy dwie funkcje* $f, g : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$ *punktem regularnym dla funkcji* f *i* g. *Załóżmy, że* $c = f(x_0)$, $\nabla f(x_0)$ *i* $\nabla g(x_0)$ *nie są równoległe, to styczne do*

$$M = \{x \in U : g(x) = 0\} \text{ i } f^{-1}[\{c\}]$$

w punkcie x_0 *też nie są równoległe i stąd dla każdego* $r > 0$ *istnieją* $x_-, x_+ \in B(x_0, r) \cap M$ *takie, że* $f(x_-) < f(x_0) < f(x_-)$.

Więc, jeżeli w każde $x \in M$ *jest regularnym punktem względem funkcji* f *i* g *i* f *ma ekstremum warunkowe względem* g *w punkcie* x_0, *to* $\nabla f(x_0)$ *jest równoległe do* $\nabla g(x_0)$, *tzn. istnieje* $\lambda \in \mathbb{R}$ *takie, że*

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0).$$

Okazuje się, że powyższe rozważania można uogólnić na przypadek, gdy $g : D \to \mathbb{R}^m$ *i* $m < n$.

Twierdzenie 5.5.1 (O mnożnikach Lagrange'a) *Niech* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *będzie zbiorem otwartym i* $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$. *Załóżmy, że* $x_0 \in U$ *i* $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}^m$ *dla* $m < n$.

Jeżeli każde $x \in M = \{x : g(x) = \bar{0}\}$ *jest punktem regularnym funkcji* f *i funkcji* g_i *dla* $i \in \{1, \dots, m\}$ *oraz* f *ma ekstremum warunkowe względem funkcji* g *w punkcie* x_0, *to*

$\nabla f(x_0) \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\nabla g_i(x_0) : \ i \in \{1, \ldots, m\}$, *tzn. istnieją* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *takie, że*

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla g_i(x_0).$$

Liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *nazywamy mnożnikami Lagrange'a. Zauważmy, że przyjmując* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *oraz* $L(x, \bar{\lambda}) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ *warunek*

$$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla g_i(x).$$

jest równoważny warunkowi

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0 \ \text{dla} \ i \in \{1, \ldots, n\}$$

oraz

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0 \ \text{dla} \ j \in \{1, \ldots, m\}$$

Funkcja L *nazywana jest funkcją Lagrange'a.*

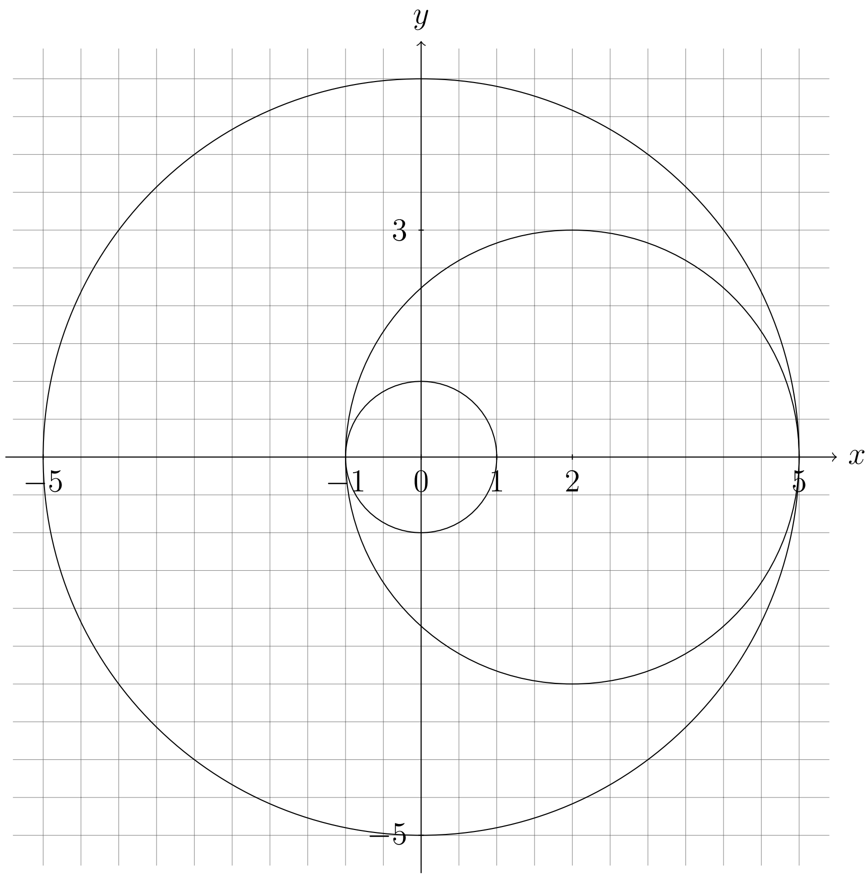
Na przykładzie pokażemy, jak stosując metodę mnożników Lagrange'a wyznaczymy wartość największą funkcji na zadanym zbiorze.

Przykład 5.5.2 *Wyznaczmy wartość największą funkcji* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *na zbiorze* $D = \{(x, y) : \ (x-2)^2 + y^2 \leq 9\} \subseteq \mathbb{R}^2$. *Wpierw szukamy punktów stacjonarnych funkcji* f *leżących we wnętrzu zbioru* D. *W tym celu rozwiazujemy układ równań*

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = & 0 \\ f'_y(x, y) = & 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 2x = & 0 \\ 2y = & 0 \end{cases}.$$

Więc jedynym punktem stacjonarnym jest punkt $(0, 0) \in Int(D)$.

Szukamy punktów, które stanowią ekstremum warunkowe funkcji f *względem warunku* $g(x, y) = (x-2)^2 + y^2 - 9 = 0$. *Poniższy rysunek przedstawia sytuację, opisaną w akapicie poprzedzającym twierdzenie o mnożnikach Lagrange'a. Mianowicie, narysowany jest zbiór punktów na płaszczyźnie spełniających równanie* $(x-2)^2+y^2-9 = 0$. *Zbiór ten jest brzegiem zbioru* D *i oznaczymy go przez* $bd(D)$. *Ponadto, narysowane są dwie poziomice funkcji* f, *które są okręgami w początku układu współrzędnych i promieniach równych odpowiednio* 1 *i* 5. *Dla tych dwóch poziomic istnieją punkty wspólne z naszym brzegiem zbioru* D *i styczne w tych punktach do poziomic i* $bd(D)$ *są identyczne (a więc gradienty funkcji* f *i* g *są równoległe w tych punktach). Jedynymi takimi punktami są* $(-1, 0)$ *oraz* $(5, 0)$.



Dla funkcji $g(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 9$ *która stanowi nasz warunek, tworzymy funkcję Lagrange'a*

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y).$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = & 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} f'_x(x,y) - \lambda g'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) - \lambda g'_y(x,y) & = & 0 \\ g(x,y) & = & 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda(2x-4) & = & 0 \\ 2y - \lambda 2y & = & 0 \\ (x-2)^2 + y^2 & = & 9 \end{cases}$$

Dla $y = 0$ *mamy* $x^2 = 9$ *a stąd* $x_1 = -1$, *i* $\lambda_1 = 1/5$ *albo* $x_2 = 5$ *i* $\lambda = 5$. *Dla* $y \neq 0$, *mamy* $\lambda = 1$ *ale wtedy z pierwszego równania otrzymujemy* $-4 = 0$, *co jest niemożliwe. W takim razie, szukamy największej wartości w zbiorze*

$$\{f(x,y): \ (x,y) \in \{(0,0), (-1,0), (5,0)\}\} = \{0, 1, 25\}.$$

Liczba 25 *jest największą wartością funkcji* f *na zbiorze* D, *natomiast* 0 *jest wartością najmniejszą.*

Rozdział 6

Całki wielokrotne

W tym rozdziale wprowadzimy pojęcie wielokrotnej całki Riemanna, które jest naturalnym uogólnieniem jednowymiarowej całki w sensie Riemanna. Wspomniane pojecie poprzedzimy definicjami, które pozwolą na definicję formalną wielokrotnej całki Riemanna.

Definicja 6.0.1 *Niech $m \in \mathbb{N}$ będzie ustalona dodatnią liczba naturalną, to powiemy, że domknięty podzbiór $I \subseteq \mathbb{R}^m$ jest przedziałem, jeżeli istnieją dwa ciagi $(a_k)_{k<m}, (b_k)_{k<m} \in \mathbb{R}^m$ takie. że*

1. $(\forall k < m)\ (a_k < b_k)$,
2. $I = \prod_{k<m} [a_k.b_k] \subseteq \mathbb{R}^m$.

Wprost z definicji przedziału możemy udowodnić następujący fakt.

Fakt 6.0.1 *Niech będą dane dwa przedziały $I, J \subseteq \mathbb{R}^m$ takie, że $I = \prod_{i<m}[a_i, b_i]$, $J = \prod_{i<m}[c_i, d_i]$ to wtedy:*

1. $I \cap J = \prod_{i<m} \big([a_i, b_i] \cap [c_i, d_i]\big)$,
2. $int(I \cap J) \neq \emptyset \longleftrightarrow (\forall i < n)(c_i < b_i \vee a_i < d_i)$,
3. *jeśli $I \cap J$ jest przedziałem wtedy i tylko wtedy gdy $int(I \cap J) \neq \emptyset$ a stąd $I \cap J = \prod_{i<m}[c_i, b_i]$ jest przedziałem.*

Powiemy, że rodzina $P = P(I) = \{I_i : i < n\}$ jest podziałem przedziału I jeżeli:

1. $(\forall i < n)(I_i$ *jest przedziałem w* $\mathbb{R}^m)$,
2. $I = \bigcup_{i<n} I_i$,
3. $(\forall i, j < n)(i \neq j \longrightarrow Int(I_i) \cap Int(I_j) = \emptyset)$, *gdzie $Int(I_i)$ jest wnętrzem przedziału I_i*

zbiór wszystkich podziałów przedziału I oznaczamy przez $\mathscr{P}(I)$.

Majac dany przedział $I = \prod_{i<m}[a_i, b_i]$ i ograniczoną funkcję $f : I \to \mathbb{R}$, możemy zdefiniować jego m-wymiarową objętość przedziału (gdy $m = 1$, to będzie to długość odcinka $[a_0, b_0]$, gdy $m = 2$, to będzie to pole powierzchni prostokąta) nastepująco:

$$|I| = vol(I) = \prod_{i<m}(b_i - a_i).$$

Zauważmy, że dla dowolnego podziału $P = \{I_i : i < n\} \in \mathscr{P}(I)$ przedziału I mamy

$$|I| = \sum_{i<n} |I_i|.$$

Niech będzie dany podział $P \in \mathscr{P}(I)$ przedziału $I \subseteq \mathbb{R}^m$ i ograniczona funkcja $f : I \to \mathbb{R}$, to

1. *$S(f, P, I) = \sum_{i<n} \sup\{f(x) : x \in I_i\} \cdot |I_i|$ jest górna sumą całkową,*

2. *$s(f, P, I) = \sum_{i<n} \inf\{f(x) : x \in I_i\} \cdot |I_i|$ jest dolną sumą całkową.*

Oczywiście mamy $s(f, P, I) \leq S(f, P, I)$.

Następnie, zdefiniujemy całkę górną i dolną z wybranej funkcji. Niech $P \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie przedziałem a $f : P \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną na przedziale P, to wtedy

- $\overline{\int}_I f = \inf\{S(f, P, I) : P \in \mathscr{P}(P)\}$,
- $\underline{\int}_I f = \sup\{s(f, P, I) : P \in \mathscr{P}(P)\}$

Niech $I \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie zadanym przedziałem i $f : I \to \mathbb{R}$ będzie funkcja ograniczoną na I, to powiemy, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna jeżeli zachodzi równość:

$$\underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f,$$

i wtedy $\underline{\int}_I f$ jest całką Riemanna z funkcji f na przedziale I i oznaczamy ją przez $\int_P f$. Natychmiast z definicji, jeżeli f jest całkowalna na I, to

$$\underline{\int}_I f = \int_I f = \overline{\int}_I f.$$

W zależności od potrzeby, w przypadku, gdy $m = 2$, to przez $\iint\limits_I f(x, y)dx\,dy$ będziemy oznaczać całkę $\int_I f$, dla $m = 3$ symbol $\iiint\limits_I f(x, y, z)dx\,dy\,dz$ też będzie oznaczać całkę $\int_I f$.

Przykład 6.0.1 *Niech $I = [0,1] \times [0,1]$, i funckcja $f : I \to \mathbb{R}$ będzie stałą na I o wartości $c \in \mathbb{R}$. Wtedy dla dowolnego podziału $P = \{I_i : i < n\} \in \mathscr{P}(I)$ mamy:*

$$S(f, I, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup\{f(x) : \; x \in I_i\} \cdot |I_i| = \sum_{i<n} c \cdot |V_i| = c \cdot \sum_{i<n} |I_i| = c \cdot |I| = c,$$

analogicznie

$$s(f, I, P) = c \cdot |I| = c.$$

Tak więc

$$\overline{\int_I} f = \inf\{S(f, P, I) : \; P \in \mathscr{P}(I)\} = \inf\{c : \; P \in \mathscr{P}(I)\} = c$$

oraz

$$\underline{\int_I} f = \sup\{S(f, P, I) : \; P \in \mathscr{P}(I)\} = \sup\{c : \; P \in \mathscr{P}(I)\} = c.$$

Stąd nasza funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna na kwadracie $I = [0,1] \times [0,1]$ i wtedy

$$\int_I f(x, y)\, dx\, dy = \int_I f = c.$$

Nie każda funkcja ograniczona na przedziale I jest całkowalna w sensie Riemanna na I. Poniższy przykład ilustruje taką sytuację.

Przykład 6.0.2 (Funkcja Dirichleta (wersja dwuwymiarowa)) *Niech $I = [0,1] \times [0,1]$ i $f : I \to \mathbb{R}$ będzie określona następująco:*

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) \in I \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \\ 1 & (x, y) \in I \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}). \end{cases}.$$

Zauważmy, że dla dowolnego naturalnego $i < n$

$$I_i \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \neq \emptyset \quad \wedge \quad I_i \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \neq \emptyset.$$

Wtedy dla dowolnego podziału $P = \{I_i : \; i < n\} \in \mathscr{P}(I)$ mamy

$$S(f, P, I) = \sum_{i<n} \sup\{f(x, y) : \; (x, y) \in I_i\} \cdot |I_i| = \sum_{i<n} 1 \cdot |I_i| = |I| = 1,$$

$$s(f, P, I) = \sum_{i<n} \inf\{f(x, y) : \; (x, y) \in I_i\} \cdot |I_i| = \sum_{i<n} 0 \cdot |I_i| = 0 \cdot |I| = 0.$$

Więc mamy

$$\overline{\int_I} f = \inf\{S(f, P, I) : \; P \in \mathscr{P}(I)\} = \inf\{1 : \; P \in \mathscr{P}(I)\} = 1$$

oraz

$$\underline{\int}_I f = \sup\{s(f,P,I):\ P \in \mathscr{P}(I)\} = \sup\{0:\ P \in \mathscr{P}(I)\} = 0.$$

Ostatecznie widzimy, że obydwie całki są różne a więc nasza funkcja nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

W rodzinie $\mathscr{P}(I)$ wszystkich podziałów przedziału I możemy wprowadzić relację częściowego porządku. Mianowicie, niech będą dwa dane podziały $P, Q \in \mathscr{P}(I)$. Powiemy, że

$$P \preceq Q \longleftrightarrow (\forall A \in Q)(\exists B \in P)\ A \subseteq B.$$

Jeżeli $P \preceq Q$, to wtedy mówimy, że podział Q jest drobniejszy niż podział P albo że Q jest rozdrobnieniem podziału P.

Tak jak zapowiedzieliśmy, tak zdefiniowana relacja tworzy porządek częściowy co ujmiemy to w fakcie.

Fakt 6.0.2 *Niech $I \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie przedziałem, to para $((P)(I), \preceq)$ jest porzadkiem częściowym, tzn.*

1. *$(\forall A \in \mathscr{P}(I))\ A \preceq A$, relacja jest zwrotna,*
2. *$(\forall A, B \in \mathscr{P}(I))\ A \preceq B \wedge B \preceq A \longrightarrow A = B$, relacja jest słabo antysymetryczna,*
3. *$(\forall A, B, C \in \mathscr{P}(I))\ A \preceq B \wedge B \preceq C \longrightarrow A \preceq C$, relacja jest przechodnia.*

Ponadto, nasz porządek częściowy $(\mathscr{P}(I), \preceq)$ jest porządkiem skierowanym, to znaczy

$$(\forall A, B \in \mathscr{P}(I))(\exists C \in \mathscr{P}(I))\ A \preceq C \wedge B \preceq C.$$

Aby zobaczyć, że nasz porządek jest skierowany, wystarczy dla dowolnych podziałów $A, B \in \mathscr{P}(I)$ zdefiniować C w sposób następujący:

$$C = \{K \cap L:\ K \in A \wedge L \in B \wedge Int(K) \cap int(L) \neq \emptyset\}.$$

Łatwo sprawdzamy, że C spełnia warunki $C \in \mathscr{P}(I)$, $A \preceq C$ i $B \preceq C$.

Niestety, ten porzadek nie jest liniowy ale fakt, że jest on skierowany pozwala uzyskać wiele interesujących wniosków.

Twierdzenie 6.0.1 *Niech $I \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie przedziałem, $P, Q \in \mathscr{P}(I)$ podziałami I, $f : I \to \mathbb{R}$ ograniczoną funkcją na I. Jeżeli $P \preceq Q$, to*

1. *$S(f, Q, I) \leq S(f, P, I)$,*
2. *$s(f, P, I) \leq s(f, Q, I)$,*
3. *jeżeli $R, T \in \mathscr{P}(I)$ są dowolne, to $s(f, R, I) \leq S(f, T, I)$.*

Wprost z powyższego twierdzenia wynika następująca nierówność pomiędzy całką dolną a całką górną:

$$\underline{\int}_I f \le \overline{\int}_I f.$$

Do rozważań teoretycznych przydatne jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.0.2 *Niech $I \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie przedziałem, $f : I \to \mathbb{R}$ funkcją ograniczoną, to następujące warunki są równoważne:*

1. *f jest całkowalna w sensie Riemanna na I,*
2. *$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathscr{P}(I))\ 0 \le S(f, P, I) - s(f, P, I) < \epsilon$.*

Pokazaliśmy z definicji, że każda funkcja stała jest funkcją całkowalną na przedziale $I \subseteq \mathbb{R}^n$. Wynik ten daje sie uogólnić na dowolne funkcje ciągłe na zbiorze I.

Twierdzenie 6.0.3 *Niech $I \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie ustalonym przedziałem, to każda funkcja ciągła $f : I \to \mathbb{R}$ na I jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Dowód. *Dowód nasz rozpoczniemy od spostrzeżenia, że I jest zwarty i funkcja ciągła $f : I \to \mathbb{R}$ na zbiorze zwartym I jest jednostajnie ciągła na I to znaczy:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in I)\ d(x, x') < \delta \longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Wybierzmy liczbą rzeczywistą $\epsilon > 0$, wtedy istnieje $\delta > 0$ taka, że spełnia powyższy warunek. Niech $P \in \mathscr{P}(I)$ będzie podziałem przedziału I takim, że każdy jego element (który jest przedziałem) ma średnicę mniejszą od δ. Więc dla każdego $A \in P$ i każdych $x, x' \in K$ mamy $|f(x) - f(x')| < \epsilon/|I|$. Więc

$$sup\{f(x) :\ x \in K\} - inf\{f(x') :\ x \in K\} \le \epsilon/|I|.$$

Numerując P jako $\{K_i : i < n\}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 \le & S(f, P, I) - s(f, P, I) = \sum_{i<n} \sup\{f(x) : x \in K_i\} \cdot |K_i| - \sum_{i<n} \inf\{f(x') : x' \in K_i\} \cdot |K_i| \\ = & \sum_{i<n} \big(\sup\{f(x) : x \in K_i\} - \inf\{f(x') : x' \in K_i\}\big) \cdot |K_i| \le \sum_{i<n} \frac{\epsilon}{|I|} \cdot |K_i| \\ = & \frac{\epsilon}{|I|} \cdot \sum_{i<n} |K_i| = \frac{\epsilon}{|I|} \cdot |I| = \epsilon. \end{aligned}$$

Na mocy Twierdzenia 6.0.2 wnosimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna na wybranym przedziale I. ■

Mamy nastepujące własności całki Riemanna.

Twierdzenie 6.0.4 *Niech $I \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie przedziałem, $f, g : I \to \mathbb{R}$ beda funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna, $c \in \mathbb{R}$, to wtedy*

1. $\int_I (f+g)$ istnieje i $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$,
2. $\int_I (c \cdot f)$ istnieje i $\int_I (c \cdot f) = c \cdot \int_I f$,
3. $\int_I (f \cdot g)$ istnieje.

Twierdzeniem, które pozwala na obliczanie pewnych całek wielokrotnych udowodnił Fubini i brzmi następująco:

Twierdzenie 6.0.5 (Fubini) *Niech będą dane dwa przedziały $I \subseteq \mathbb{R}^m$ i $J \subseteq \mathbb{R}^n$ (n może być różne od n). Niech $f : I \times J \to \mathbb{R}$ będzie całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $I \times J$, to wtedy*

1. *dla każdego $x \in I$ funkcja $g(x) = \int_J f(x,y)dy$ istnieje i jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale I,*
2. *dla każdego $y \in J$ funkcja $h(y) = \int_I f(x,y)dx$ istnieje i jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale J,*
3. $$\int_{I\times J} f = \int_{I\times J} f(x,y)\,dx\,dy = \int_I g(x)\,dx = \int_J h(y)\,dy.$$

Uwaga 6.0.1 *Ponieważ każda funkcja ciągła na $I \times J$, to funkcje $g(x) - \int_J f(x,y)\,dy$ i $h(y) = \int_I f(x,y)\,dx$ są ciągłe odpowiednio na I i J. Stąd f jest całkowalna w sensie Riemanna na $I \times J$ i funkcje g, h są całkowalne w sensie Riemanna na I, J odpowiednio i zachodzi wzór:*

$$\int_{I\times J} f = \int_{I\times J} f(x,y)\,dx\,dy = \int_I g(x)\,dx = \int_J h(y)\,dy.$$

Przejdźmy do przykładu

Przykład 6.0.3 *Niech $f(x,y) = (x+y)^2$ i $I = [0,2] \times [3,4]$, policzmy całkę całkę $\int_I f$.*

$$\int_I f = \int_{[0,2]\times[3,4]} (x+y)^2\,dx\,dy = \int_{[0,2]} \left(\int_{[3,4]} (x+y)^2\,dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_3^4 (x+y)^2 dy \right) dx$$
$$= \int_0^2 (x+y)^3/3 \Big|_{y=3}^{y=4} dx = \int_0^2 \big((x+4)^3/3 - (x+3)^3/3 \big)\,dx$$
$$= \big((x+4)^4/(12) - (x+3)^4/(12) \big) \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{12}((6^4 - 5^4) - (4^4 - 3^4)).$$

Mamy następujący fakt.

Fakt 6.0.3 *Niech $I \subseteq \mathbb{R}^m$, $J \subseteq \mathbb{R}^n$ będa przedziałami, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ funkcje ciagłe na przedziałach I, J odpowiednio, to*

$$\int_{I\times J} f(x) \cdot g(y)\,dx\,dy = \left(\int_I f(x)\,dx \right) \cdot \left(\int_J g(y)\,dy \right).$$

Przykład 6.0.4

$$\iint\limits_{[0,1]\times[2,3]} (xye^{x+y})\,dx\,dy = \Big(\int_0^1 xe^x\,dx\Big)\cdot\Big(\int_2^3 ye^y\,dy\Big)$$
$$= \Big(xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\Big)\cdot\Big(ye^y\Big|_2^3 - \int_2^3 e^y\,dy\Big)$$
$$= xe^x - e^x\Big|_0^1 \cdot ye^y - e^y\Big|_2^3 = 1\cdot(3e^3 - e^3 - (2e^2 - e^2)) = 2e^3 - e^2.$$

6.0.1 Miara Jordana

Niech $A \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie dowolnym podzbiorem $\mathbb{R}^m$. Wtedy definiujemy funkcję $\mathbf{1}_A : \mathbb{R}^m \to \{0,1\}$ w sposób następujący: dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^m$ zachodzi

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in \mathbb{R}^m \setminus A. \end{cases}$$

Funkcją $\mathbf{1}_A$ nazywamy funkcją charakterystyczną zbioru A.

Załóżmy, że $A \subseteq I \subseteq \mathbb{R}^m$, gdzie I jest najmniejszym względem inkluzji przedziałem zawierającym zbiór A, tutaj dopuszczamy sytuację, gdy pewne boki przedziału I są jednoelementowe (I może być nawet punktem). Powiemy, że zbiór A jest mierzalny w sensie Jordana jeżeli jego funkcja charakterystyczna $\mathbf{1}_A \restriction I$ jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna na przedziale I i wtedy $\mu(A)$ jest miarą zbioru A, gdzie

$$\mu(A) = \int_I \mathbf{1}_A.$$

Mamy następujące własności funkcji m:

1. *$\mu(\emptyset) = 0$,*
2. *jeżeli $I \subseteq \mathbb{R}^m$ jest przedziałem to $\mu(I) = |I| = vol(I)$,*
3. *dla każdego $x \in \mathbb{R}^m$ $\mu(\{x\}) = 0$,*
4. *jeżeli $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ są mierzalne i $A \subseteq B$, to $\mu(A) \leq \mu(B)$,*
5. *jeżeli $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ są mierzalne, to $\mu(A\cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$. Ponadto, jeśli $A \cap B = \emptyset$ to $\mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*

Uwaga 6.0.2 *Niestety, funkcja miary nie jest σ addytywna, tzn. istnieje rodzina $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ parami rozłącznych zbiorów mierzalnych taka, że $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \neq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Co więcej, jej suma mnogościowa $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nie jest zbiorem mierzalnym w wyżej wspomnianym sensie. Przykładem jest przeliczalny zbiór*

$$A = ([0,1]\times[0,1]) \cap (\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}).$$

Jego funkcją charakterystyczną jest funkcja Dirichleta z przykładu 6.0.2. Oczywiście każdy punkt na kwadracie $[0,1]\times[0,1]$ *jest zbiorem miary zero (a więc jest zbiorem mierzalnym).*

Niech $I \subseteq \mathbb{R}^m$ *będzie zadanym przedziałem i* $A \subseteq I$. *Niech będzie dany podział* $P = \{I_i : i < n\} \in \mathscr{P}(I)$. *Rozważmy sumy całkowe dla podziału* P *i funkcji charakterystycznej zbioru* A. *Wtedy mamy*

$$s(\mathbf{1}_A, P, I) = \sum_{i<n} \inf\{f(x) : x \in I_i\}|I_i| = \sum_{J\in P\colon J\subseteq A} |J|,$$

natomiast

$$\mu_*(A) = \sup\{\sum_{J\in P\colon J\subseteq A} |J| : P \in \mathscr{P}(I)\} = \underline{\int_I} \mathbf{1}_A$$

jest dolną miarą Jordana zbioru A. *Analogicznie*

$$S(\mathbf{1}_A, P, I) = \sum_{i<n} \sup\{f(x) : x \in I_i\}|I_i| = \sum_{J\in P\colon J\cap A\neq\emptyset} |J|,$$

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{J\in P\colon J\subseteq A} |J| : P \in \mathscr{P}(I)\} = \overline{\int_I} \mathbf{1}_A$$

jest górną miarą Jordana zbioru A. *W takim razie, zbiór* A *jest mierzalny w sensie Jordana, jeśli wspomniane przed chwilą obydwie miary są sobie równe. Wówczas jego miara* $\mu(A)$ *jest równa zarówno* $\mu_*(A)$ *jak i* $\mu^*(A)$. *Intuicja podpowiada, że zbiór* A *jest mierzalny w sensie Jordana jeśli miara Jordana brzegu zbioru* A *jest równa zeru. Poniższe twierdzenie potwierdza te przypuszczenie.*

Twierdzenie 6.0.6 *Niech* $A \subseteq I \subseteq \mathbb{R}^m$ *i* I *będzie* m*-wymiarowym przedziałem. Wtedy* A *jest mierzalny w sensie Jordana wtedy i tylko wtedy, gdy zewnętrzna miara Jordana brzegu zbioru* A *jest równa zeru.*

Dowód. *Załóżmy, że zbiór* A *jest mierzalny w sensie Jordana. Niech będzie dana liczba* $\epsilon > 0$. *Wtedy istnieje podział* $P \in \mathscr{P}(I)$ *taki, że* $0 \leq S(\mathbf{1}_A, P, I) - s(\mathbf{1}_A, P, I) < \epsilon$. *Ostatnią nierówność możemy przepisać następująco:*

$$0 \leq \sum_{J\in P: J\cap A\neq\emptyset\wedge\neg J\subseteq A} |J| \leq \epsilon.$$

Zauważmy, że dla każdego $x \in bd(A) \setminus bd(I)$ *istnieje* $J \in P$ *takie, że* $x \in J$, $A \cap J \neq \emptyset$ *i* $A^c \cap J \neq \emptyset$. *W takim razie, mamy*

$$bd(A) \setminus bd(I) \subseteq \bigcup\{J \in P : J \cap A \neq \emptyset \wedge \neg J \subseteq A\},$$

co wobec poprzedniej nierówności

$$\mu^*(bd(A) \setminus bd(I)) \leq \sum_{J\in P: J\cap A\neq\emptyset\wedge\neg J\subseteq A} |J| \leq \epsilon.$$

Wobec dowolności wyboru liczby ϵ wnosimy, że miara zewnętrzna $bd(A) \setminus bd(I)$ jest równa zeru a stąd $\mu^*(bd(A)) = 0$.

Teraz przejdźmy do dowodu implikacji odwrotnej. Niech $\mu(bd(A)) = 0$. Niech $\epsilon > 0$ będzie dowolnie wybraną liczbą. Wtedy istnieje $P \in \mathscr{P}(I)$ takie, że

$$\sum_{J \in P : bd(A) \cap J \neq \emptyset} |J| < \epsilon.$$

Niech

$$\mathcal{D} = \{J \in P : bd(A) \cap J \neq \emptyset\}.$$

Wtedy oczywiście mamy $bd(A) \subseteq \bigcup \mathcal{D}$. Niech $\mathcal{C} = \{J \in P : J \cap A \neq \emptyset \wedge \neg J \subseteq A\}$. Zauważmy, że $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. Przyjmijmy

$$\mathcal{Z} = \{J \in P : J \cap A \neq \emptyset\}, \quad \mathcal{W} = \{J \in P : J \subseteq A\},$$

to $\mathcal{Z} = \mathcal{W} \cup \mathcal{C}$ i $\mathcal{W} \cap \mathcal{C} = \emptyset$, $\bigcup \mathcal{W} \subseteq A \subseteq \bigcup \mathcal{Z}$. Ponadto, mamy

$$s(\mathbf{1}_A, P, I) = \sum_{J \in \mathcal{W}} |J| \leq \mu_*(A), \quad \mu^*(A) \leq S(\mathbf{1}_A, P, I) = \sum_{J \in \mathcal{Z}} |J|.$$

Wówczas

$$0 \leq \mu^*(A) - \mu_*(A) \leq S(\mathbf{1}_A, P, I) - s(\mathbf{1}_A, P, I) = \sum_{J \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{W} = \mathcal{C}} |J| \leq \sum_{J \in \mathcal{D}} |J| < \epsilon.$$

■

Możemy uogólnić Twierdzenie 6.0.3 opuszczajac założenie ciągłości funkcji nieco słabszym warunkiem. Mówi otym nastepjace twierdzenie.

Twierdzenie 6.0.7 *Niech będzie dany przedział $I \subseteq \mathbb{R}^m$ i $f : I \to \mathbb{R}$ jest ograniczona taka, że zbiór punktów nieciągłości funkcji f ma miare zero Jordana. Wtedy f jest całkowalna na I w sensie Riemanna.*

Dowód. *Niech f będzie funkcja ograniczoną przez $M > 0$. Niech $A \subseteq I$ będzie zbiorem punktów nieciągłości funkcji F i A ma miarę Jordana równą zero. Udowodnimy, że zachodzi drugi warunek w Twierdzeniu 6.0.2. Niech bedzie dane $\epsilon > 0$, ponieważ A ma miarę Jordana równą zero, to istnieje podział $P \in \mathscr{P}(I)$ taki, że dla*

$$P' = \{J \in P : \ J \cap A \neq \emptyset\}$$

$\sum_{J \in P'} |J| < \epsilon/4M$. Ponieważ $\bigcup_{J \subseteq P \setminus P'} J$ jest domkniętym podzbiorem I (a więc zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^m$), to f jest funkcją jednostajnie ciągła na zbiorze $\bigcup_{J \subseteq P \setminus P'} J$. Niech $R \in \mathscr{P}(I)$ bedzie takim podziałem, że $P \preceq R$ i dla każdego $J \in R$ i każdego $J' \in P'$jeśli $J \cap J' = \emptyset$, to dla kazdego $x, y \in J$ $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2|I|$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} S(f,R,I)-s(f,R.I) = & \sum_{J\in\{J\in R:\ (\forall J'\in P')J\cap j'=\emptyset\}} (\sup\{f(x):x\in J\}-\inf\{f(x):x\in J\})|J| \\ & + \sum_{J\in\{J\in R:\ (\exists J'\in P')J\cap J'\neq\emptyset\}} (\sup\{f(x):x\in J\}-\inf\{f(x):x\in J\})|J| \\ & \leq \sum_{J\in\{J\in R:\ (\forall J'\in P')J\cap j'=\emptyset\}} \epsilon/2|I| + \sum_{J\in\{J\in R:\ (\exists J'\in P')J\cap J'\neq\emptyset\}} 2M|J| \\ & \leq \epsilon/2 + 2M\epsilon/4M < \epsilon. \end{aligned}$$

Twierdzenie zostało udowodnione. ■

6.0.2 Całka Riemanna na zbiorze

Definicja 6.0.2 (Całka Riemanna na zbiorze) *Niech $D \subseteq I \subseteq \mathbb{R}^m$ D zbiorem mierzalnym, I najmniejszym względem inkluzji przedziałem zawierającym D. Niech $f : D \to \mathbb{R}$, to f jest całkowalna w sensie Riemanna na zbiorze D wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f^* : I \to \mathbb{R}$ określona naststępująco*

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ 0 & x \in I \setminus D \end{cases}$$

jest mierzalna na przedziale I oraz

$$\int_D f = \int_I f^*.$$

Zachodzą następujące dwa twierdzenia.

Twierdzenie 6.0.8 *Niech $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ bedą dwiema funkcjami całkowalnym w sensie Riemanna na A, to*

- *$\int_A (f+g)$ istnieje i $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$,*
- *$\int_A c\dot{f}$ istnieje i $\int_A c \cdot f = c \cdot \int_A f$.*

Twierdzenie 6.0.9 *Jeżeli $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ i $A \cap B = \emptyset$ oraz $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ jest taka że*

1. *$f \restriction A$ jest całkowalna w sensie Riemanna na A,*
2. *$f \restriction B$ jest całkowalna w sensie Riemanna na B,*

to f jest całkowalna w sensie Riemanna na $A \cup B$ oraz

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Przejdźmy teraz do specjalnych podzbiorów płaszczyzny rzeczywistej.

Definicja 6.0.3 (Trapez krzywoliniowy) *Niech będą dane dwie liczby rzeczywiste a, b oraz funkcje ciągłe $g, d : [a, b] \to \mathbb{R}$ takie, że $d(x) \leq g(x)$ dla dowolnego $x \in [a, b]$. Wtedy zbiór*

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b \ \wedge \ d(x) \leq y \leq g(x)\}$$

nazywamy trapezem krzywoliniowym wzgledem osi OX. Analogicznie definiujemy trapez krzywoliniowy względem osi OY. Powiemy, że zbiór $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zbiorem **regularnym**, *jeśli jest skończoną sumą mnogościową parami rozłacznych trapezów krzywoliniowych względem osi OX lub osi OY.*

Poniższe twierdzenie pozwala obliczać całki z funkcji ciągłych określonych na trapezie krzywoliniowym. Twierdzenie to wynika z twierdzenia Fubiniego.

Twierdzenie 6.0.10 *Niech będzie dany trapez krzywoliniowy*

$$T_X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b] \ \wedge \ d(x) \leq y \leq g(x)\}$$

lub

$$T_Y = \{(x, y) \in \mathbb{R} : \ y \in [a, b] \ \wedge \ d(y) \leq g(y)\},$$

to

1. *jeżeli $f : T_X \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na T_X, to całka $\iint_{T_X} f(x, y)\, dx\, dy$ istnieje i*

$$\int_{T_X} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{d(x)}^{g(x)} f(x, y)\, dy \right) dx,$$

2. *jeżeli $f : T_Y \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na T_Y, to całka $\iint_{T_Y} f(x, y)\, dx\, dy$ istnieje i*

$$\int_{T_Y} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{d(y)}^{g(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Stosując wielokrotnie powyższe twierdzenie, możemy obliczać całkę z funkcji ciągłej na zadanym zbiorze regularnym dodając wartości obliczonych całek na poszczególnych trapezach krzywoliniowych.

Przejdźmy do przykładu.

Przykład 6.0.5 *Niech zbiór D będzie zbiorem ograniczonym przez równania (i nierówności):*

$$0 \leq x, \ 0 \leq y, \ x^2 = y, \ y^2 = x.$$

Obliczmy całkę $\iint_D (1 + x + 2xy^2)\, dx\, dy$. Zauważmy, że $x = y^2$ i $y = x^2$ a stąd $x = x^4$. Wiżec $x = 0$ lub $x = 1$. Zauważmy, że dla $x \in [0, 1]$ $x^2 \leq \sqrt{x}$, więc nasz zbiór D jest trapezem krzywoliniowym nastepującej postaci:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0, 1] \ \wedge \ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Mamy więc

$$\iint\limits_D (1+x+2xy^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1+x+2xy^2)\,dy\right) dx = \int_0^1 (y+xy+2xy^3/3)\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^1 \left((\sqrt{x}+x\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\cdot x^{\frac{3}{2}}) - (x^2+x\cdot x^2+\frac{2}{3}x\cdot x^6)\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}-x^2-x^3-\frac{2}{3}x^7\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}\frac{x^8}{8}\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{4}{21}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}.$$

Zauważmy, że w pierwszej linijce liczymy całkę wewnetrzną po zmiennej y a zmienną x wtedy traktujemy jako stałą.

Przykład 6.0.6 *Obliczmy całkę*

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy,$$

gdzie obszar D jest ograniczony krzywymi

$$y = x^2-1 \wedge y = -x^2+1.$$

Wpierw znajdujemy część wspólną obydwu wykresów, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = x^2-1 \\ y = -x^2+1 \end{cases} \longleftrightarrow x^2-1=-x^2+1 \longleftrightarrow 2x^2=2 \longleftrightarrow x^2=1 \longleftrightarrow x=-1 \vee x=1.$$

Więc dla $x \in [-1,1]$ mamy $x^2-1 \le -x^2+1$. Stąd D jest trapezem krzywoliniowym o następującej postaci:

$$D = \{(x,y):\ x \in [-1,1]\ \wedge\ x^2-1 \le y \le -x^2+1\}.$$

Stosując Twierdzenie 6.0.10 mamy:

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2-1}^{-x^2+1} xy\,dy\right) dx = \int_{-1}^1 x\left(\int_{x^2-1}^{-x^2+1} y\,dy\right) dx = \int_{-1}^1 x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2-1}^{-x^2+1} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left(x(-x^2+1)^2 - x(x^2-1)^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 0\,dx = 0.$$

6.1 Całki potrójne.

Wykład ten zaczniemy od wyznaczania całek na specjalnych podzbiorach przestrzeni trójwymiarowej przestrzeni.

Definicja 6.1.1 (Oszar normalny w $\mathbb{R}^3$***)*** *Niech* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *będzie dwuwymiarowym zbiorem regularnym (tzn. będący skończoną sumą parami rozłącznych wnętrzach trapezów krzywoliniowych), niech* $d, g : D \to \mathbb{R}$ *będą ciągłymi funkcjami takimi, że dla kazdego* $(x, y) \in D$ $d(x, y) \leq g(x, y_)$, *to następujący zbiór*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D \ \wedge \ d(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

nazywamy zbiorem normalnyym wzgledem płaszczyzny OXY*. Analogicznie definiujemy obszar normalny względem płaszczyzn* OXZ *i* OYZ*. Powiemy, że zbiór* $V \subseteq \mathbb{R}^3$ *jest zbiorem* **regularnym** *w* $\mathbb{R}^3$*, jeśli jest skończoną sumą mnogościową parami rozłacznych wnątrzach zbiorów normalnych względem płaszczyzn* OXY, OXZ *lub* OYZ*.*

Poniższe twierdzenie pozwala obliczać całki z funkcji ciągłych określonych na trójwymiarowym zbiorze normalnym. Twierdzenie to wynika z twierdzenia Fubiniego.

Twierdzenie 6.1.1 *Niech będzie dany trójwymiarowy zbiór normalny* V_{XY} *względem płaszczyzny* OXY *:*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D \ \wedge \ d(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}.$$

Niech $f : V \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą na* V*, to*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy, dz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z))\, dz \right) dx\, dy.$$

Analogicznie jest dla trójwymiarowych obszarów względem płaszczyzn OXZ *i* OYZ*.*

Ponadto, całka z funkcji ciągłej na trójwymiarowym zbiorze regularnym jest sumą całek z tej funkcji po trójwymiarowych zbiorach normalnych definiujacych nasz zbiór regularny.

Stosując wielokrotnie powyższe twierdzenie, możemy obliczać całkę z funkcji ciągłej na zadanym zbiorze regularnym dodając wartości obliczonych całek na trójwymiarowych zbiorach normalnych

W szczególnym przypadku, gdy $V = [a_!, b_1] \times [a_1, b_2] \times [a_3, b_3]$ *i* $f : V \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, to*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

Ponadto, jeżeli funkcja f *jest postaci* $f(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$*, to*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x)\, dx \Big) \cdot \left(\int_{a_2}^{b_2} f_2(y)\, dy \right) \cdot \left(\int_{a_3}^{b_3} f_3(z)\, dz \right).$$

Przykład 6.1.1 *Oblicz całkę potrójną* $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$*, gdzie*

$$f(x,y,z) = xy \wedge V: y \geq 0 \wedge y = y \wedge x = \sqrt{9-z^2} \wedge z \geq 0$$

Wpierw wyznaczymy obszar całkowania jako zbiór normalny względem płaszczyzny OXZ*. Z podanych warunków mamy:*

$$0 \leq y = x \longrightarrow 0 \leq x,$$

dalej

$$0 \leq x \leq \sqrt{9-z^2} \wedge 0 \leq z$$

a stąd $0 \leq z$ *oraz* $9 - z^2 \geq 0$ *a więc* $0 \leq z \leq 3$ *i mamy* $0 \leq x \leq \sqrt{9-z^2}$ *dla* $z \in [0,3]$*. W takim razie* V *jest postaci*

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,z) \in D \wedge 0 \leq y \leq x\},$$

gdzie D *jest następujący*

$$D = \{(x,z)\ \ z \in [0,3] \wedge 0 \leq x \leq \sqrt{9-z^2}\}.$$

Więc mamy

$$V = \{(x,y,z):\ 0 \leq z \leq 3\ \wedge\ 0 \leq x \leq \sqrt{9-x^2}\ \wedge\ 0 \leq y \leq x\}.$$

Teraz możemy liczyć naszą całkę:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V xy\,dx\,dy\,dz &= \int_0^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-z^2}} \left(\int_0^x xy\,dy \right) dx \right) dz \\
&= \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{9-z^2}} x \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{9-z^2}} x \cdot \frac{x^2}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{9-z^2}} x^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^3 dz\, \frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{9-z^2}} = \frac{1}{8} \int_0^3 (9-z^2)^2\,dz \\
&= \frac{1}{8} \int_0^3 81 - 18z^2 + z^4\,dz = \frac{1}{8} \cdot (81z - 6z^3 + \frac{z^5}{5})\Big|_0^3 = \frac{1}{8} \cdot \left(81 \cdot 3 - 6 \cdot 27 + \frac{243}{5} \right).
\end{aligned}$$

Przykład 6.1.2 *Obliczmy całkę*

$$\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz,$$

gdzie obszar V *jest ograniczony powierzchniami:*

$$z = y\ \wedge\ z = 0\ \wedge\ y = 1 - x^2.$$

zbiór V musi być zbiorem ograniczonym, więc V jest określony przez nierówności:

$$0 \leq z \leq y \wedge y \leq 1 - x^2.$$

Więc w szczególności $0 \leq 1 - x^2$ a stąd $-1 \leq x \leq 1$. W takim razie

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1 - x^2 \ \wedge \ 0 \leq z \leq y\}$$

Liczymy całkę:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V y \, dx \, dy \, dz &= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{1-x^2} dy \int_0^y y \, dz = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{1-x^2} y \cdot z \Big|_{z=0}^{z=y} dy \\
&= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{1-x^2} y^2 \, dy = \int_{-1}^{1} \frac{y^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=1-x^2} dx \\
&= \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^3 \, dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 \, dx \\
&= \frac{1}{3} \cdot (x - 3\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}) \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \cdot (1 - 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{7}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{35} = \frac{32}{105}.
\end{aligned}$$

6.2 Całki wielokrotne - zamiana zmiennych.

Podobnie jak w kursie analizy matematycznej 1 *tak samo tutaj mamy do czynienia z zamianą zmiennych w całkach wielokrotnych.*

Twierdzenie 6.2.1 *Niech $U \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie ograniczonym zbiorem otwartym, $g : U \to \mathbb{R}^m$ odwzorowaniem majecym wszystkie ciągłe pochodne pierwszego rzędu na zbiorze U i macierz Jacobiego $J_g(x)$ jest macierzą odwracalną w każdym punkcie $x \in U$. Załóżmy,że $f : U \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na zbiorze $V = g[U]$, to wtedy całka $\iiint\limits_U f \circ g(x) \, det(J_g(x)) \, dx$ istnieje oraz zachodzi równość:*

$$\iiint\limits_V f(y) \, dy = \iiint\limits_U f \circ g(x) \cdot det(J_g(x)) \, dx.$$

Uwaga 6.2.1 *W powyższym twierdzeniu zbiór otwarty U możemy zastąpić przez dowolny zbiór mierzalny w sensie Jordana o niepustym wnetrzu i takim, że jego brzeg ma miare Jordana równą zero. Ponadto, w powyższym wzorze na równość całek mozemy zapisać w bardziej rozwinietej postaci:*

$$\iiint\limits_V f(y_1, \ldots . y_m) \, dy_1 \ldots dy_m = \iiint\limits_U f \circ g(x_1, \ldots, x_m) \cdot det(J_g(x_1, \ldots, x_m)) \, dx_1, \ldots dx_m.$$

Uwaga 6.2.2 *Istnieje ogólniejsze pojęcie całki niż w sensie Riemanna. Jest nim całka Lebesgue'a, gdzie każda funkcja całkowana w sensie Riemanna jest całkowalna w sensie Lebesgue'a i wtedy są one równe. Ponadto, twierdzenie o zamiania zmiennych dalej zachodzi i dotyczy funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a. W tym twierdzeniu nie musimy sie ograniczać do zbiorów ograniczonych i otwartych ale w ogóle zbiorów otwartych w* $\mathbb{R}^m$.

W przypadku całek podwójnych najbardziej używana jest zamiana zmiennych ze zmiennych biegunowych do zmienych w układzie kartzjańskim. Każdy punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0)\}$ *można zapisać następująco:*

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \text{gdzie } r > 0 \wedge \varphi \in [0, 2\pi).$$

Wtedy mozemy zaproponować odwzorowanie (tak zwane biegunowe) $g : (0,\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ *w sposób nastepujący:*

$$(0,\infty) \times [0, 2\pi) \ni (r, \varphi) \to g(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Wtedy macierz Jacobiego jest następująca:

$$J_g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r\cos\varphi}{\partial r}(r, \varphi) & \frac{\partial r\cos\varphi}{\partial\varphi}(r, \varphi) \\ \frac{\partial r\sin\varphi}{\partial r}(r, \varphi) & \frac{\partial r\sin\varphi}{\partial\varphi}(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi. \end{pmatrix}$$

Wówczas jakobian $det(J_g(r, \varphi)$ *jest równy* r. *Uwzgledniając twierdzenie 6.2.1 i uwagę 6.2.1 możemy sformułować twierdzenie o zamianie zmiennych biegunowych.*

Twierdzenie 6.2.2 (Zmienne biegunowe) *Niech* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *będzie zbiorem mierzalnym o niepustym wnętrzu takiego, że* $\mu(bd(D)) = 0$, $E = g[D]$ *(g-przekształcenie biegunowe). Niech* $f : E \to \mathbb{R}$ *bedie funkcją ciągłą na* E, *to wtedy* $\iint_D f(r, \varphi) \cdot r\,dr\,d\varphi$ *istnieje oraz*

$$\iint\limits_E f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r\,dr\,d\varphi.$$

Przykład 6.2.1 *Obliczmy całkę*

$$\iint\limits_E (x^2 + y^2)^3\,dx\,dy,\ \text{gdzie } E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Zbiór E *jest wyznaczony przez nierówność* $x^2 + y^2 \leq 9$. *Wstawiajac za* $x = r\cos\varphi$ *i* $y = r\sin\varphi$ *otrzymujemy:*

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq 9 \longleftrightarrow &(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \leq 9 \longleftrightarrow r^2 \leq 9 \wedge \varphi \in [0, 2\pi) \\ \longleftrightarrow &(r, \varphi) \in [0, 3] \times [0, 2\pi). \end{aligned}$$

W takim razie zbiór D występujący w twierdzeniu 6.2.2 jest prostokątem $[0,3]\times[0,2\pi)$ *a* $f\circ g(r,\varphi)=(r^2)^3=r^6$. *W końcu liczymy naszą całkę (pamiętamy o jakobianie):*

$$\iint\limits_E (x^2+y^2)^3\,dx\,dy=\iint\limits_D r^6\cdot r\,dr\,d\varphi=\int_0^3 dr\,r^7\int_0^{2\pi}d\varphi$$
$$=\frac{r^8}{8}\Big|_0^3\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{3^8}{8}\cdot 2\pi=\pi\cdot\frac{3^8}{4}.$$

Przykład 6.2.2 *Wyznaczmy całkę* $\iint\limits_E\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ *gdzie E jest obszarem ograniczonym przez krzywą o równaniu*

$$x^2-y^2=(x^2+y^2)^2.$$

Przejdźmy do współrzędnych biegunowych:

$$(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2=((r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2)^2\longleftrightarrow r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=r^4.$$

Ponieważ $r>0$, *to*

$$x^2-y^2=(x^2+y^2)^2\longleftrightarrow\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=r^2$$

Ponieważ E jest zwarty (domknięty i ograniczony), to D też jest zbiorem zwartym (odwzorowanie g^{-1} jest tez ciągłe). Więc mamy

$$(r,\varphi)\in D\longleftrightarrow(r,\varphi)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]\wedge r^2\le\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=\cos(2\varphi)$$

Więc $0\le\cos 2\varphi$, *co daje nam, że dla pary* $(r,\varphi)\in D$ $0\le r\le\cos 2\varphi$ *i*

$$(0\le 2\varphi\le\pi/2\vee 3\pi/2\le 2\varphi\le 2\pi)\longleftrightarrow(0\le\varphi\le\pi/4\vee 3\pi/4\le\varphi\le\pi)$$

Naszą zbiór D jest postaci:

$$D=\{(r,\varphi):\ \varphi\in[0,\pi/4]\cup[3\pi/4,\pi]\wedge 0\le r\le\cos 2\varphi\}=D_0\cup D_1$$

gdzie

$$D_0=\{(r,\varphi):\ \varphi\in[0,\pi/4]\wedge 0\le r\le\cos 2\varphi\},$$
$$D_1=\{(r,\varphi):\ \varphi\in[3\pi/4,\pi]\wedge 0\le r\le\cos 2\varphi\}$$

Stosując twierdzenie 6.2.2 mamy

$$\iint\limits_E\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint\limits_D r\cdot r\,dr\,d\varphi=\iint\limits_{D_0} r\cdot r\,dr\,d\varphi+\iint\limits_{D_1} r\cdot r\,dr\,d\varphi.$$

Pozostało nam obliczyć całki po D_0 i D_1.

$$\iint\limits_{D_0} r^2\,dr\,d\varphi = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\cos 2\varphi} r^2\,dr = \int_0^{\pi/4} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\cos 2\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \cos^3 2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} (1-\sin^2 2\varphi)\cdot\cos 2\varphi\,d\varphi = \left|\begin{array}{c} t=\sin 2\varphi \\ dt = 2\cos 2\varphi\,d\varphi \\ \varphi = 0 \to t = 0, \varphi = \pi/4 \to t = 1 \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 1-t^2\,dt = \frac{1}{6}\cdot\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9},$$

$$\iint\limits_{D_1} r^2\,dr\,d\varphi = \int_{3\pi/4}^{\pi} d\varphi \int_0^{\cos 2\varphi} r^2\,dr = \int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\cos 2\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_{3\pi/4}^{\pi} \cos^3 2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int_{3\pi/4}^{\pi} (1-\sin^2 2\varphi)\cdot\cos 2\varphi\,d\varphi = \left|\begin{array}{c} t=\sin 2\varphi \\ dt = 2\cos 2\varphi\,d\varphi \\ \varphi = 3\pi/4 \to t = -1, \varphi = \pi \to t = 0 \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^0 1-t^2\,dt = \frac{1}{6}\cdot\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^0 = \frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}.$$

Ostatecznie, mamy

$$\iint\limits_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_D r^2\,dr\,d\varphi = \iint\limits_{D_0} r^2\,dr\,d\varphi + \iint\limits_{D_1} r^2\,dr\,d\varphi = \frac{1}{9}+\frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Tutaj rachunki możemy skrócić o ile zakres zmiennych biegunowych r, φ będzie taki $r \in [0,\infty)$ i $\varphi \in [-\pi,\pi]$ (funkcje trygonometryczne sa okresowe). Wtedy dla $\varphi \in [-\pi,\pi]$ mamy

$$0 \le \cos 2\varphi \longleftrightarrow -\pi/2 \le 2\varphi \le \pi/2 \longleftrightarrow -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$$

a więc

$$D = \{(r,\varphi):\ -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4 \wedge 0 \le r \le \cos 2\varphi\}$$

jest trapezem krzywoliniowym. Liczymy całkę:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_D r^2\,dr\,d\varphi &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\cos 2\varphi} r^2\,dr \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\cos 2\varphi} d\varphi \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^3 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1-\sin^2 2\varphi)\cdot\cos 2\varphi\,d\varphi \\
&= \left|\begin{matrix} t=\sin 2\varphi \\ dt = 2\cos 2\varphi\,d\varphi \\ \varphi=-\pi/4 \to t=-1, \varphi=\pi/4 \to t=1 \end{matrix}\right| \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1-t^2\,dt = \frac{1}{6}\cdot\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9},
\end{aligned}$$

Przejdźmy do kolejnego przykładu, w którym obszar całkowania nie jest kołem o środku w początku układu współrzędnych.

Przykład 6.2.3 *Obliczmy całkę*

$$\iint\limits_E x\,dx\,dy \quad \textbf{gdzie } E : (x-1)^2+y^2 \le 1 \wedge y \le x.$$

Stosując współrzędne biegunowe otrzymujemy:

$$(r\cos\varphi-1)^2+(r\sin\varphi)^2 \le 1 \wedge r\sin\varphi \le r\cos\varphi$$

co jest równoważne

$$r^2\cos^2\varphi - 2r\cos\varphi + 1 + r^2\sin^2\varphi \le 1 \wedge \sin\varphi \le \cos\varphi$$

a stąd

$$r^2 \le r\cos\varphi \wedge \sin\varphi \le \cos\varphi.$$

Dzieląc pierwszą nierówność przez $r>0$ mamy

$$r \le \cos\varphi \wedge \sin\varphi \le \cos\varphi.$$

Ponieważ $r>0$, to $0 \le \cos\varphi$ i $\sin\varphi \le \cos\varphi$. Więc $\varphi \in [0,\pi/4]\cup[3\pi/2,2\pi]$ i stąd zbiór D jest postaci następującej:

$$D = \{(r,\varphi):\ \varphi\in[0,\pi/4]\wedge 0\le r\le\cos\varphi\}\cup\{(r,\varphi):\ \varphi\in[3\pi/2,2\pi]\wedge 0\le r\le\cos\varphi\}$$

Zbiór D jest sumą dwóch trapezów krzywoliniowych. Stosując pewien zabieg polegający na zmianie zakresu zmienności zmiennej φ z przedziału $[0,2\pi]$ na przedział $[-\pi,\pi]$ Nasz zbiór D (który parametryzuje nasz zbiór początkowy E) staje się trapezem krzywoliniowym

$$D = \{(r,\varphi):\ \varphi\in[-\pi/4,\pi/4]\wedge 0\le r\le\cos\varphi\}$$

i zamiast liczyć dwóch całek będziemy liczyć tylko jedną całkę podwójną.

$$\iint\limits_E x\,dx\,dy = \iint\limits_D (r\cos\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \cos\varphi \int_0^{\cos\varphi} r^2\,dr$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\varphi\cdot\cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi$$
$$= \frac{1}{6}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{6}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + 1 + 0\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{8}\pi.$$

W przypadku całek potrójnych zazwyczaj stosujemy jedno z dwóch podstawień (zamiany zmiennych) Wpierw omówimy zmienne cylindryczne zwane też zmiennymi walcowymi. Każdy punkt $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0,0,0)\}$ *można zapisać następująco:*

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = h,\ \text{gdzie } r > 0 \wedge \varphi\in[0,2\pi)\wedge h\in\mathbb{R}.$$

Wtedy mozemy zaproponować odwzorowanie (tak zwane cylindryczne) $g:(0,\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ *w sposób nastepujący:*

$$(0,\infty)\times[0,2\pi)\times\ni(r,\varphi,h)\to g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}.$$

Wtedy macierz Jacobiego jest następująca:

$$J_g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r\cos\varphi}{\partial r}(r,\varphi,h) & \frac{\partial r\cos\varphi}{\partial\varphi}(r,\varphi,h) & \frac{\partial r\cos\varphi}{\partial h}(r,\varphi,h) \\ \frac{\partial r\sin\varphi}{\partial r}(r,\varphi,h) & \frac{\partial r\sin\varphi}{\partial\varphi}(r,\varphi,h) & \frac{\partial r\sin\varphi}{\partial h}(r,\varphi,h) \\ \frac{\partial h}{\partial r}(r,\varphi,h) & \frac{\partial h}{\partial\varphi}(r,\varphi,h) & \frac{\partial h}{\partial h}(r,\varphi,h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wówczas jakobian $det(J_g(r,\varphi)$ *jest równy* r. *Możemy sformułować twierdzenie o zamianie zmiennych cylindrycznych.*

Twierdzenie 6.2.3 (Zmienne cylindryczne) *Niech* $W\subseteq\mathbb{R}^3$ *będzie zbiorem mierzalnym o niepustym wnętrzu takiego, że* $\mu(bd(W)) = 0$, $E = g[W]$ *(g-przekształcenie cylindryczne). Niech* $f: E\to\mathbb{R}$ *bedie funkcją ciągłą na* E, *to wtedy* $\iiint_W f(r,\varphi,h)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dh$ *istnieje oraz*

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_W f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dh.$$

Przykład 6.2.4 *Obliczmy całkę*

$$\iint\limits_E (x^2+y^2)\,dx\,dy,\ \text{gdzie } E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 9\wedge -1\le z\le 3\}.$$

Zbiór E jest wyznaczony przez nierówność $x^2+y^2 \leq 9$. Wstawiajac za $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ i $z = h$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 \leq 9 \wedge -1 \leq z \leq 3 &\longleftrightarrow (r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2 \leq 9 \wedge -1 \leq h \leq 3 \\ &\longleftrightarrow r^2 \leq 9 \wedge \varphi \in [0,2\pi) \wedge h \in [-1,3] \\ &\longleftrightarrow (r,\varphi,h) \in [0,3]\times[0,2\pi)\times[-1,3]. \end{aligned}$$

W takim razie zbiór W występujący w twierdzeniu 6.2.4 jest prostopadłościanem $[0,3]\times[0,2\pi)\times[-1,3]$ a $f\circ g(r,\varphi,h) = r^2$. W końcu liczymy naszą całkę (pamiętamy o jakobianie):

$$\begin{aligned} \iiint\limits_E (x^2+y^2)^3\,dx\,dy\,dz &= \iiint\limits_W r^2\cdot r\,dr\,d\varphi\,dh = \int_{-1}^{3} dh \int_0^3 dr\, r^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= h\Big|_{-1}^{3}\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^3\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = 4\cdot\frac{3^4}{4}\cdot 2\pi = 162\cdot\pi. \end{aligned}$$

Przejdźmy do zmiennych sferycznych. Każdy wektor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ możemy zapisać następująco:

$$\begin{cases} x = & r\cos\varphi\cos\theta \\ y = & r\sin\varphi\cos\theta \\ z = & r\sin\theta \end{cases} \quad (r,\varphi,\theta) \in [0,\infty)\times[0,2\pi)\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Wówczas $g : [0,\infty)\times[0,2\pi)\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$

$$g(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)$$

nazywamy przekształceniem sferycznym a jego jakobian jest równy:

$$J_g(r,\varphi,\theta) = r^2\cos\theta.$$

Twierdzenie 6.2.4 (Zmienne sferyczne) *Niech $W \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem mierzalnym o niepustym wnętrzu takiego, że $\mu(bd(W)) = 0$, $E = g[W]$ (g-przekształcenie sferyczne). Niech $f : E \to \mathbb{R}$ bedie funkcją ciągłą na E, to wtedy $\iiint_W f(r,\varphi,h)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dh$ istnieje oraz*

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_W f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

Przykład 6.2.5 *Oblicz całkę potrójną*

$$\iiint\limits_E \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}, \quad gdzie\ E : z = \frac{1}{2},\ z = \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Więc

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{1}{2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$

Stosując zmienne sferyczne, mamy

$$\frac{1}{2} \le r\sin\theta \quad \wedge \quad r\sin\theta \le \sqrt{1-r^2\cos^2\theta}$$

więc $1/2 \le r\sin\theta$ *oraz* $r^2\sin^2\theta \le 1 - r^2\cos^2\theta$ *a stąd*

$$\frac{1}{2r} \le \sin\theta \quad \wedge \quad r^2 \le 1.$$

Ponieważ $0 \le r \le 1$ *to* $\frac{1}{2} \le \frac{1}{2r} \le \sin\theta$*. Więc* $\frac{1}{2} \le \sin\theta$*, co daje nam* $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ *Ponieważ mamy* $r\sin\theta \le \sqrt{1-r^2\cos^2\theta}$*, to zbiór zmiennych sferycznych* W *jest określony przez następujące nierówności:*

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{2\sin\theta} \le r \le 1$$

$$\iiint\limits_E \frac{dx\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2} = \iiint\limits_W \frac{r^2\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta}{r^2} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta\,\cos\theta \int\limits_{\frac{1}{2\sin\theta}}^{1} dr$$

$$= 2\pi \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{2\sin\theta}\right)\cos\theta\,d\theta = 2\pi \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} 1\,d\theta - \pi \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta$$

$$= 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - \pi \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta = \frac{2}{3}\pi^2 - \pi \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta = \begin{vmatrix} t & = & \sin\theta \\ dt & = & \cos\theta\,d\theta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\pi^2 - \pi \int\limits_{1/2}^{1} \frac{1}{t}\,dt = \frac{2}{3}\pi^2 - \pi \ln|t|\Big|_{1/2}^{1} = \frac{2}{3}\pi^2 - \pi\ln 2.$$

6.3 Całki wielokrotne - zastosowania.

Zastosowanie w geometrii

Jedną z inspiracji całki wielokrotnej (w sensie Riemanna) jest miara powierzchni lub objętości podzbioru przestrzeni euklidesowej. Mianowicie, zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *jest mierzalny w sensie Jordana jeżeli istnieje całką w sensie Riemanna:*

$$\mu(A) = \int_A 1.$$

Zważywszy na fakt, że A *jest pozdzbiorem pewnego przedziału* $I = \prod_{i<m}[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^m$*, to* I *możemy zapisać jako produkt kartezjanski dwóch przedziałów* $[a_0, b_0] \times \prod_{i=1}^{m-1}[a_i, b_i]$ *i wtedy stosując twierdzenie Fubiniego, mamy*

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int\limits_A 1 = \int\limits_I \mathbf{1}_A(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})\, dx_0\, dx_1\, \ldots\, dx_{m-1} \\ &= \int\limits_{a_0}^{b_0} \Bigg(\int\limits_{\prod_{i=1}^{m-1}[a_i,b_i]} \mathbf{1}_A(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1})\, dx_1 \ldots\, dx_{m-1} \Bigg)\, dx_0.\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_A(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) = 1 &\longleftrightarrow (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in A \longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in A_{x_0} \\ &\longleftrightarrow \mathbf{1}_{A_{x_0}}(x_1, \ldots, x_{m-1}) = 1, \text{ gdzie} \\ A_{x_0} &= \{(x_1, \ldots, x_{m-1} :\ (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in A\} \subseteq \prod_{i=1}^{m-1}[a_i, b_i].\end{aligned}$$

Więc

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int\limits_{a_0}^{b_0} \Bigg(\int\limits_{\prod_{i=1}^{m-1}[a_i,b_i} \mathbf{1}_{A_{x_0}}(x_1, \ldots, x_{m-1}\, dx1\, \ldots\, dx_{m-1} \Bigg)\, dx_0 \\ &= \int\limits_{a_0}^{b_0} \Bigg(\int\limits_{A_{x_0}} 1\, dx_1 \ldots dx_{m-1} \Bigg)\, dx_0 = \int\limits_{a_0}^{b_0} \mu(A_{x_0})\, dx_0.\end{aligned}$$

Powyższe rozumowanie daje nam nastepujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.3.1 *Jeżeli* $A \subseteq \mathbb{R}^m$ *jest mierzalnym zbiorem w sensie Jordana, to istnieją liczby* $a, b \in \mathbb{R}$ *takie, że*

$$\mu(A) = \int\limits_a^b \mu(A_x)\, dx,$$

gdzie dla kazdego $x \in [a, b]$

$$A_x = \{(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} :\ (x, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in A\}.$$

W szczególności, miarę dwuwymiarowych podzbiorów normalnych opisuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.3.2 *Niech $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bedzie obszarem normalnym względem osi OX,*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leq x \leq b \wedge d(x) \leq y \leq g(x)\}$$

gdzie $d, : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą fukcjami ciągłymi na $[a, b]$ tak, że $d(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$. Wtedy

$$\mu(D) = \int_a^b (g(x) - d(x))\, dx$$

Analogicznie liczymy pole powierzchni obszaru normalnego względem osi OY

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leq y \leq b \wedge d(y) \leq x \leq g(y)\}$$

$$\mu(D) = \int_a^b (g(y) - d(y))\, dy$$

Możemy analogicznie sformułować twierdzenie o mierze podzbioru normalnego w $\mathbb{R}^3$.

Twierdzenie 6.3.3 *Jeżeli $V \subseteq \mathbb{R}^3$ jest obszarem normalnym:*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D \wedge d(x, y) \leq z \leq g(x, y)\},$$

gdzie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ jest obszarem normalnym, $g, d : D \to \mathbb{R}$ są ciągłymi funkcjami na D, to

$$\mu(V) = \iint_D (g(x, y) - d(x, y))\, dx\, dy.$$

Przykład 6.3.1 *Obliczmy objetość czterowymiarowej kuli $B_4(\bar{0}, R)$ o środku w początku układu wspolrzednych i promieniu $R > 0$. W tym celu wykorzystamy Twierdzenie 6.3.1. Niech $A = B_4(\bar{0}, R)$, to dla $x \in [-R, R]$ mamy*

$$\begin{aligned} A_x =& \{(y, z, t) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq R^2\} \\ =& \{(y, z, t) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + z^2 + t^2 \leq R^2 - x^2\} = B_3(\bar{0}, \sqrt{R^2 - x^2}). \end{aligned}$$

Więc

$$\begin{aligned} \mu(B_4(\bar{0}, R)) =& \mu(A) = \int\limits_{-R}^{R} \mu(A_x) = \int\limits_{-R}^{R} \frac{4}{3}\pi(\sqrt{R^2 - x^2})^3\, dx = \left| \begin{matrix} x = R \sin t \\ dx = R \cos t\, dt \end{matrix} \right| \\ =& \frac{4}{3}\pi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} R^4 \cos^3 t\, \cos t\, dt = \frac{4}{3}\pi R^4 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt \\ =& \frac{\pi}{3} R^4 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t)\, dt = \frac{2}{3}\pi R^4 \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt \\ =& \frac{2}{3}\pi R^4 \cdot \left(\frac{3}{2}t + \sin 2t + \frac{\sin 4t}{8} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2} R^4. \end{aligned}$$

Powiemy, że $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ *jest płatem, jeżeli istnieje obszar normalny* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *i funkcja* $f : D \to \mathbb{R}$ *i*

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}.$$

Zachodzi następujące twierdzenie, które umożliwia obliczanie pól płatów powierzchniowych.

Twierdzenie 6.3.4 *Niech* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *będzie obszarem normalnym,* $f : D \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją taką, że wszystkie pochodne drugiego rzedu istnieją i sa ciągłe na* D*. Wtedy pole powierzchni płata powierzchniowego*

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}.$$

wyraża się wzorem

$$|\Sigma| = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial y^2}(x, y)\right)^2}\, dx\, dy.$$

Zastosowania w fizyce

Niech $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *będzie obszarem regularnym (skończona suma trapezów krzywoliniowych o rozłącznych parami wnetrzach), to każdą nieujemną funkcję ciągłą* $\sigma : D \to [0, \infty]$ *nazywamy gęstością obszaru* D*. Wtedy liczba*

$$M = \iint\limits_D \sigma(x, y)\, dx\, dy$$

nazywamy masą obszaru D*. Zakładamy, że* M *jest wartością dodatnią.*

Niech będzie dany obszar D *o zadanej gęstości* σ*, to punkt* $(x_s, y_x) \in \mathbb{R}^2$ *taki, że*

$$x_s = \frac{\iint\limits_D x \cdot \sigma(x, y)\, dx\, dy}{\iint\limits_D \sigma(x, y)\, dx\, dy}, \quad y_s = \frac{\iint\limits_D y \cdot \sigma(x, y)\, dx\, dy}{\iint\limits_D \sigma(x, y)\, dx\, dy}.$$

jest środkiem masy D*.*

Dla zadanego obszaru D *o gęstości* σ *możemy wprowadzić pojęcie momentu bezwładności względem osi* OX *i* OY*:*

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \sigma(x, y)\, dx\, dy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \sigma(x, y)\, dx\, dy$$

Ponadto,

$$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\sigma(x, y)\, dx\, dy$$

jest momentem bezwładności D względem początku układu współrzędnych.

Podobnie, możemy wprowadzić pojęcia związane z bryłą będącą trójwymiarowym obszarem regularnym $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Kazdą funkcją ciągłą $\gamma : V \to [9, \infty]$ nazywamy gęstością bryły V oraz liczba

$$M = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

jest masą bryły M. Podobnie jak w przypadku dwuwymiarowym, tutaj też zakładamy, że M jest dodatnią liczbą rzeczywistą.

Możemy wprowadzić momenty statyczne bryły V o gęstości γ względem wybranych płaszczyzn:

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \quad M_{xz} = \iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

oraz

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Środek masy $(x_s, y_s, z_s) \in \mathbb{R}^3$ bryły V jest związany z momentami statycznymi w następujący sposób:

$$x_s = \frac{M_{yz}}{M}, \quad y_s = \frac{M_{xz}}{M}, \quad z_s = \frac{M_{xy}}{M}.$$

Wprowadzimy pojecie momentu obrotowego bryły wokół osi. Mianowicie

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\gamma(x, y, x)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\gamma(x, y, x)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\gamma(x, y, x)\, dx\, dy\, dz.$$

Tak jak w przypadku dwuwymiarowym, tak i tutaj $E_k = \frac{I_x \omega^2}{2}$ jest energią kinetyczną ruchu obrotowego wokół bryły wokół osi OX, Podobnie jest ze wzorami dla pozostałych osi obrotu.

Przykład 6.3.2 *Wyznaczymy energię kinetyczną poruszającego sie jednorodnego walca V po poziomej powierzchni z prędkością liniową v. Rozważany walec ma masę m, średnicę $d = 2R$ i wysokość H. Wpierw wyznaczamy gęstość ze wzoru na masę*

$$m = \iiint\limits_V \gamma_0 dV = \gamma_0 |V| = \gamma_0 \pi R^2 h.$$

Stąd mamy gęstość:

$$\gamma_0 = \frac{m}{\pi R^2 H}.$$

Wyliczymy całkowitą enregię kinetyczną ruchu walca na dwa sposoby.
PIERWSZY SPOSÓB:

W takim razie całkowita energia kinetyczna jest sumą energi kinetycznej ruchu postępowego i energii kinetycznej ruchu obrotoego walca względem osi obrotu.

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_z\omega^2}{2},\ \textit{gdzie}\ \omega = \frac{v}{R}.$$

Tutaj nasz walec jest zadany następująco:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq R^2 \wedge 0 \leq z \leq H\}.$$

W takim razie liczymy moment bezwładnośći I_z. Zastosujemy tutaj współrzędne cylindryczne.

$$x^2 + y^2 \leq R^2 \wedge 0 \leq z \leq H \longleftrightarrow 0 \leq r \leq R \wedge 0 \leq \varphi \leq 2\pi \wedge 0 \leq h \leq H.$$

W takim razie nasz walec we współrzędnych cylindrycznych jest prostopadłościanem:

$$U = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, H].$$

Więc

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \gamma_0 \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \gamma_0 \iiint\limits_U r^2 \cdot r\,dr\,\varphi\,dh$$
$$= \gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R drr^3 \int\limits_0^H dh = \gamma_0 2\pi H \int\limits_0^R r^3\,dr = 2\pi\gamma_0 H \frac{R^4}{4} = 2\pi \cdot \frac{m}{\pi R^2 H} \cdot H \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}mR^2.$$

Teraz jestęmy gotowi wyliczyć całkowitą energię kinetyczną naszego walca jako sumę energii kinetycznych ruchu podtępowego i obrotowego względem osi symetrii walca (pamiętamy, że predkość kątowa wyraża si wzorem $\omega = \frac{v}{R}$):

$$\begin{aligned} E_k =& \frac{mv^2}{2} + \frac{I_z\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} \\ =& \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2. \end{aligned}$$

DRUGI SPOSÓB:

Możemy wyliczyć całkowitą energie kinetyczną ruchu walca jako energię kinetyczną ruchu obrotowego walca względem osi chwilowego podparcia (miejsce styku walca z podłożem)

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2},\ \textit{gdzie}\ \omega = \frac{v}{R}.$$

pozostało wyznaczenie momentu bezwładności I walca:

$$V = \{(x, y, z) :\ (x - R)^2 + y^2 \leq r^2 \wedge 0 \leq z \leq H\}.$$

Widzimy, że oś OZ pokrywa się ze zbiorem punktów styczności walca V z osią OZ. Wówczas szukany moment bezwładności liczymy ze wzoru:

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2)\gamma_0 \, dx \, dy \, dz.$$

Zastosujemy współrzędne cylindryczne przesunięte:

$$x - R = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi, \; z = h.$$

Więc mamy

$$R^2 \geq (x-R)^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \geq 0 \wedge 0 \leq h \leq H.$$

Tutaj obszar w nowych zmiennych jest następujący:

$$U = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, H].$$

Więc

$$\begin{aligned}
I =& \gamma_0 \iiint_V (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \gamma_0 \iiint_{[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,H]} \big((R + r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi\big) r \, dr \, d\varphi \, dh \\
=& \gamma_0 \iiint_{[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,H]} (R^2 + 2Rr\cos\varphi + r^2) r \, dr \, d\varphi \, dh = \gamma_0 H \int_0^R dr (R^2 r\varphi + 2Rr^2\sin\varphi + r^3\varphi)\Big|_0^{2\pi} \\
=& \gamma_0 H 2\pi \int_0^R (R^2 r + r^3) \, dr = 2\pi\gamma_0 H (R^2 \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4})\Big|_0^R = 2\pi\gamma_0 H R^4 \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi\gamma_0 H R^4 = \frac{3}{2} m R^2.
\end{aligned}$$

Ostatecznie, całkowita energia kinetyczna walca wynosi

$$E_k = \frac{1}{2}\frac{3}{2} m R^2 \frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4} m v^2.$$

Energia potencjalna bryły w jednorodnym polu grawitacyjnym z przyspieszeniem ziemskim g wynosi

$$E_p = g \cdot \iiint_V z\gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Przykład 6.3.3 *Obliczmy energię potencjalną jednorodnej bryły o masie m o nastepującej postaci:*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2(x^2 + y^2) \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}.$$

Zaczniemy od wyznaczanie współczynnika gęstości $\gamma(x,y,z) = \gamma_0$, *korzystając ze wzoru na masę bryły:*

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \gamma_0 \iiint\limits_V dx\,dy\,dz.$$

Przechodząc dowspółrzędnych cylindrycznych, mamy $0 \le r \le \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty \le h \le \infty$ *i*

$$2r^2 \le h \le 1 + r^2,$$

stąd $2r^2 \le 1 + r^2$ *a stąd* $r^2 \le 1$ *a więc* $0 \le r \le 1$. *Więc nasza bryła w nowym układzie współrzędnych ma następującą postać:*

$$U = \{(r,\varphi,h) :\ \varphi \in [0,2\pi] \wedge r \in [0,1] \wedge 2r^2 \le h \le 1 + r^2\}.$$

Stąd masa jest równa

$$\begin{aligned} m =&\gamma_0 \iiint\limits_U r dr\,d\varphi\,dh = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr\,r \int\limits_{2r^2}^{1+r^2} dh = \gamma_0 2\pi \int\limits_0^1 ((1+r^2) - (2r^2))r\,dr \\ =&2\pi\gamma_0 \int\limits_0^1 r - r^3\,dr = 2\pi\gamma_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\pi\gamma_0. \end{aligned}$$

Stąd $\gamma_0 = \frac{2m}{\pi}$.

Liczymy energię potencjalną naszej bryły. Przechodząc do zmiennych cylindrycznych mamy:

$$\begin{aligned} E_p =&g \iiint\limits_V z\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \gamma_0 g \iiint\limits_U r dr\,d\varphi\,h dh = \gamma_0 g \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr\,r \int\limits_{2r^2}^{1+r^2} h dh \\ =&2\pi\gamma_0 g \int\limits_0^1 \left(\frac{h^2}{2}\right)\Bigg|_{2r^2}^{1+r^2} r\,dr = \pi\gamma_0 g \int\limits_0^1 ((1+r^2)^2 - (2r^2)^2)r\,dr \\ =&\pi\gamma_0 g \int\limits_0^1 (1 + 2r^2 + r^4 - 4r^4)r\,dr = \pi\gamma_0 g \int\limits_0^1 r + 2r^3 - 3r^5\,dr = \pi\gamma_0 g \left(\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^4}{4} - 3\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 \\ =&\frac{\pi\gamma_0}{2} g = \frac{1}{2}\pi\frac{2m}{\pi} g = mg. \end{aligned}$$

Rozdział 7

Dodatek

7.1 Zbiory i funkcje

W naiwnej teorii mnogości łatwo dojść do różnych paradoksów (antynomii). Jednym z nich jest jest paradoks istnienia zbioru wszystkich zbiorów. W tm celu matematycy wprowadzili aksjomatyczne podejście do teorii mnogości. Ernst Zermelo i Abraham Fraenkel wprowadzili aksjomaty, które obejmują prawie cały obszar matematyki i są ogólnie akceptowalne. Wspomniany system aksjomatów nazywany jest aksjomatami ZF *albo* ZFC *. Ten ostatni system aksjomatów powstał poprzez dołączenie aksjomatu wyboru* AC *do systemu* ZF *.*

Utwórzmy listę tych aksjomatów. Mianowicie, systemem (albo schematem) aksjomatów teorii ZF *nazywamy następujacą listę:*

A0 – **aksjomat istnienia** $(\exists x)\ x = x$,

A1 – **aksjomat ekstensjonalności** $(\forall x)(\forall y)(\forall t)x = y \longleftrightarrow (t \in x \longleftrightarrow t \in y)$,

A2 – **aksjomat pary** $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t)(t \in z \longleftrightarrow (t = x \vee t = y))$,

A3 – **aksjomat sumy** $(\forall x)(\exists y)(\forall t)t \in y \longleftrightarrow (\exists u)u \in x \wedge t \in u)$,

A4 – **aksjomat zbioru potęgowego** $(\forall x)(\exists y)(\forall t)t \in y \longleftrightarrow (\forall s)(s \in t \longrightarrow s \in x)$,

A5 – **aksjomat wyróżniania (wycinania)** *Niech φ będzie formułą języka teorii mnogości $\overline{(}\epsilon)$ o wolnych zmiennych $u, u_0, \ldots, u_{n-1}$. To dla dowolnych $a_0, \ldots, a_{n-1}$ zachodzi zdanie*

$$(\forall x)(\exists y)(\forall t)t \in y \longleftrightarrow t \in x \wedge \varphi(t, a_0, \ldots, a_{n-1}),$$

A6 – **aksjomat zastępowania** *Niech φ będzie formułą języka teorii mnogości $\overline{(}\epsilon)$ o wolnych zmiennych $u, u_0, \ldots, u_{n-1}$. To dla dowolnych $a_0, \ldots, a_{n-1}$ zachodzi zdanie: jeżeli*

$$(\forall x)(\forall y)(\forall y')\ (\varphi(x, y, a_0, \ldots, a_{n-1}) \wedge \varphi(x, y', a_0, \ldots, a_{n-1}) \longrightarrow y = y')$$

to

$$(\forall a)(\exists b)(\forall t)\ (t \in b \longleftrightarrow (\exists x \in a)\varphi(x, t, a_0, \ldots, a_{n-1}),$$

*A*7 – **aksjomat nieskończoności** $(\exists x)\emptyset \in x \wedge (\forall t) t \in x \longrightarrow t \cup \{t\} \in x,$

*A*8 – **aksjomat regularności** $(\forall x)(\neg(x = \emptyset)) \longrightarrow (\exists y) y \in x \wedge (\forall t)(t \in y \longrightarrow t \notin x).$

Powyższy system aksjomatów nazywamy aksjomatyką teorii ZF *. Jeżeli do tego systemu dołączymy aksjomat wyboru AC, to otrzymamy aksjomatykę teorii* ZFC *. Aksjomat wyboru (*AC *– axiom of choice) brzmi następująco:*

$$(\forall x)(\forall t)(\forall s)((t \in x \longrightarrow \neg(t = \emptyset)) \wedge t \neq s \longrightarrow \neg(\exists u) u \in t \wedge u \in s)$$

$$\longrightarrow ((\exists y)(\forall t) t \in x \longrightarrow (\exists u) t \cap y = \{u\}).$$

*Aksjomat A*0 *mówi nam, że istnienieje zbiór, natomiast A*1 *stwierdza, że dwa zbiory sa równe wtedy i tylko wtedy gdy mają te same elementy. Kolejny aksjomat mówi nam, że mając dwa zbiory, powiedzmy x i y, można utworzyć zbiór z, którego elementami są jedynie zbiory x i y. Zbiór z zapisujemy jako $\{x, y\}$. Ponadto, jesli $x = y$, to wtedy definiujemy $\{x\}$ jako zbiór $\{x, x\}$ i nazywamy go singletonem zbioru x. Zbiór $\{x, y\}$ nazywamy nieuporządkowana parą zbiorów x i y. Stąd bierze się nazwa aksjomatu A*2 *jako aksjomat pary (nieuporządkowanej). Ponadt, można wprwadzić pojęcie pary uporządkowanej (x, y) zbiorów x i y jako nastepujący zbiór:*

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Powyższy zbiór jest nazywamy uporządkowaną parą Kuratowskiego, pochodzącą od polskiego matematyka Kazimierza Kuratowskiego, który to pojęcie wprowadził. Łatwo sprawdzamy, że zachodzi następująca własność pary Kuratowskiego:

$$(\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')\ (x, y) = (x', y') \longleftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

*Kolejnym aksjomatem na liście jest aksjomat sumy A*3*. Wówczas dla dowolnego zbioru x (traktowanego jako rodzina zbiorów) zbiór y jest sumą mnogościową rodziny x i oznaczany jest przez $\bigcup x$. Wtedy zbiór $\bigcup x$ możemy zapisać następująco:*

$$\bigcup x = \{t :\ (\exists u) t \in u \wedge u \in x\}.$$

W przypadku, gdy $x = \{u, v\}$ mamy $\bigcup x = u \cup v$.

*Aksjomat A*4 *zwanym aksjomatem zbioru potęgowego mwi nam, że z dowolnego zbioru x możemy utworzyć zbiór y, który składa sie ze wszystkich podzbiorów zbioru x. Zbiór y oznaczamy przez $P(x)$. Z aksjomatu A*1 *wynika, że taki zbiór y jest jeden (dla ustalonego zbioru x) i wtedy piszemy*

$$P(x) = \{t :\ (\forall s) s \in t \longrightarrow s \in x\},$$

albo prościej

$$P(x) = \{t : t \subseteq x\}.$$

Następnym aksjomatem jest aksjomat wyróżniania, który mówi nam, że mając dowolny zbiór x i dowolną formułę $\varphi(u, ...)$ można utworzyć zbiór y, którego elementami są tylko te elementy $t \in x$, dla których spełniona jest $\varphi(t, ..)$. Formuł jeżyka teorii mnogości jest nieskończenie wiele, więc A5 jest naprawdę schematem aksjomatów. Podobna sprawa się ma z aksjomatem zastępowania A6, który też jest schematem aksjomatów. Aksjomat zastępowania mówi nam, że jeżeli formuła φ o przynajmniej dwóch wolnych zmiennych jest formułą funkcyjną (definiuje funkcję w klasie wszystkich zbiorów), to dla każdego zbioru a

$$b = \{t : \ (\exists x \in a)\varphi(x, t)\}$$

jest również zbiorem. Zauważmy, że zbiór b jest jedyny, co wynika z aksjomatu ekstensjonalności A1.

Kolejnym aksjomatem jest aksjomat nieskończoności. Aksjomat ten mówi nam, że istnieje zbiór induktywny x (który jest nieskończony) i zawiera wszystkie liczby naturalne. Mianowicie kładziemy 0 jako zbiór pusty $\emptyset$. Następnie zbiór $1 = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ jest również elementem zbioru x, następnie $2 = 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$ jest też elementem zbioru x, dalej $n = \{0, 1, \ldots, n-1\} \in x$ o ile $0, 1, \ldots, n-1 \in x$.

Aksjomatem zamykającym listę aksjomatów teorii ZF *jest aksjomat regularności A8, który mówi, że kazdy niepusty zbiór x ma element ϵ-minimalny, tzn., że istnieje $y \in x$ taki, że dla kazdego $t \in x$ zachodzi $\neg(t \in y)$. Aksjomat ten pozwala zlikwidować antynomię istnienia zbioru wszystkich zbiorów. Mianowicie, jeśli zbiór x były zbiorem wszystkich zbiorów, to w szczególności mielibyśmy $x \in x$. Wtedy zbiór z zdefiniowany nastepujaco*

$$\{t \in x : \ t \in t\}$$

jest niepusty bo $x \in z$. Z aksjomatu regularności istniałby element $y \in z$, taki, że dla każdego $t \in z$ mamy $t \notin y$. Ale $y \in z$ wiec $y \in y$, co daje nam sprzeczność z faktem że dla każdego $t \in z$ zachodzi $t \notin y$.

Listę aksjomatów zamyka aksjomat wyboru AC *. Aksjomat ten mówi nam, że z dowolnej rodziny x zbiorów niepustych parami rozłącznych można utworzyć zbiór y taki, że z każdym zbiorem $t \in x$ ma dokładnie jeden wspólny element. Z tego aksjomatu wynika, że dla suma mnogościowa przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym. Kolejną konsekwencją tego aksjomatu jest fakt, że każda przestrzeń liniowa V ma bazę (jako maksymalny (względem inkluzji) liniowo niezależny podzbiór przestrzeni V).*

Przejdźmy teraz do pojęcia funkcji. Mianowicie każdy zbiór f nazywamy funkcją, jeżeli są spełnione dwa warunki:

1. $(\forall z)(z \in f \longrightarrow (\exists x)(\exists y) z = (x, y))$,
2. $(\forall x)(\forall y)(\forall y')((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f) \longrightarrow y = y'$.

Łatwo sprawdzić, że zbiór pusty jest funkcją. Innym przykładem funkcji jest zbiór

$$\{(n, n + 1) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

albo

$$\{(x,y):\ x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2+1\}.$$

Z każdą funkcją f można skojarzyć dziedzinę $dom(f)$ oraz jej przeciwdziedzinę $rng(g)$ zdefiniowane następująco

$$(\forall x) x \in dom(f) \longleftrightarrow (\exists y)\ (x,y) \in f,$$

$$(\forall y) y \in rng(f) \longleftrightarrow (\exists x)\ (x,y) \in f.$$

Przede wszystkim musimy się upewnić, że dla funkcji f, $dom(f)$ i $rng(f)$ są zbiorami. jeżeli $x \in dom(f)$, to istnieje zbiór y taki, że $(x,y) \in f$ więc

$$\{\{x\},\{x,y\}\} \in f$$

a stąd jest $z \in f$ takie, że $\{x\} \in z$ oraz $\{x,y\} \in z$. Z aksjomatu sumy mamy więc, że

$$\{x\} \in \bigcup f \wedge \{x,y\} \in \bigcup f.$$

Dalej, istnieje $u \in \bigcup f$ takie, że $x \in u$, istnieje $v \in \bigcup f$ takie, że $x \in v$ i $y \in v$. Ostatecznie mamy

$$x \in \bigcup\bigcup f \quad \wedge \quad y \in \bigcup\bigcup f.$$

Ponieważ $x \in dom(f)$ jest dowolne, to $dom(f) \subseteq \bigcup\bigcup x$. Analogicznie dochodzimy do tego, że $rng(f) \subseteq \bigcup\bigcup f$. Wiec $dom(f), rng(f)$ możemy zapisać jako

$$dom(f) = \{x \in \bigcup\bigcup f:\ (\exists y)(x,y) \in f\}$$

oraz

$$rng(f) = \{y \in \bigcup\bigcup f:\ (\exists x)(x,y) \in f\}.$$

Ponieważ f jest zbiorem, to $\bigcup f$ jest zbiorem a wiec $\bigcup\bigcup f$ jest zbiorem, co na mocy aksjomatu wycinania A5 mamy, że $dom(f)$ i $rng(f)$ są zbiorami.

Mając zadaną funkcję f, dla każdych zbiorów x, y definiujemy

$$y = f(x) \longleftrightarrow (x,y) \in f.$$

Niech będzie dana funkcja f oraz zbiory A, B. Definiujemy odpowiednio obraz i przeciw obraz zbioru przez funkcję f:

$$f[A] = \{y : (\exists x) x \in A \wedge y = f(x)\} = \{f(a) : a \in A\}$$

oraz

$$f^{-1}[B] = \{x :\ (\exists y) y \in B \wedge y = f(x)\} = \{x :\ f(x) \in B\}.$$

Łatwo jest zauważyć, że $f[A] \subseteq rng(f)$ i $f^{-1}[B] \subseteq dom(f)$, więc z korzystając ponownie z aksjomatu wycinania A5, $f[A]$ i $f^{-1}[B]$ są zbiorami.

Zachodzi następujący fakt (udowodniony na ćwiczeniach).

Fakt 7.1.1 *Niech f będzie funkcją, A, B, T zbiorami i $\{A_t : t \in T\}$, $\{B_t : t \in T\}$ rodzinami zbiorów indeksowanymi zbiorem T. Wtedy zachodzi*

1. *jeśli $A \subseteq B$ to $f[A] \subseteq f[B]$ i $f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B]$,*
2. $f[\bigcup_{t\in T} A_t] = \bigcup_{t\in T} f[A_t]$,
3. $f[\bigcap_{toniT} A_t] \subseteq \bigcap_{t\in T} f[A_t]$,
4. $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$, $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$,
5. $f^{-1}[\bigcup_{t\in T} B_t] = \bigcup_{t\in T} f^{-1}[B_t]$,
6. $f^{-1}[\bigcap_{t\in T} B_t] = \bigcap_{t\in T} f^{-1}[B_t]$.

Ważną operacją na zbiorach jest iloczyn kartezjański dwóch zbiorów oraz tzw. uobólniony iloczyn kartezjański. Niech będą dane dwa zbiory A i B. Niech $a \in A$ i $b \in B$ wtedy $\{a\} \in P(A)$ i $\{a, b\} \in P(A \cup B)$. Wówczas dla $a \in A$ i $b \in B$ mamy

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq P(A \cup B)$$

co jest równoważne $(a, b) \in P(P(A \cup B))$. Teraz możemy zdefiniować iloczyn kartezjanski zbiorów A i B w sposób następujący:

$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A \wedge b \in B\} \subseteq P(P(A \cup B))$$

Korzystając z aksjomatu wycinania A5, aksjomatu sumy A3 i aksjomatu potęgowego A4 widizmy, że

$$A \times B = \{(a, b) \in P(P(A \cup B)) : \ a \in A \wedge b \in B\}$$

jest zbiorem. Zauważmy, że dla każdej funkcji f mamy $f \subseteq dom(f) \times rng(f)$.

Dla danych zbiorów A i B definiujemy zbiór

$$B^A = \{f : f \text{ jest funkcja } \wedge dom(f) = A \wedge rng(f) \subseteq B\} \subseteq P(A \times B).$$

Więc na mocy aksjomatów $A2 - A5$, B^A jest również zbiorem. W literaturze można znalęźć symbol $f : A \to B$, co dosłownie oznacza $f \in B^A$.

Przejdźmy do uogólnionego iloczynu kartezjańskiego rodziny zbiorów $\mathcal{A} = \{A_t : \ t \in T\}$ indeksowanej zbiorem T. Mianowicie,

$$\prod \mathcal{A} = \prod_{t\in T} A_t = \{f \in \left(\bigcup \mathcal{A}\right)^T : \ (\forall t \in T) f(t) \in A_t\}.$$

Mając pojęcie funkcji, uogólnionego iloczynu kartezjanskiego zbiorów możemy podać dwa różne sformułowania równowazne z aksjomatem wyboru AC.

Fakt 7.1.2 *Nastepujące warunki są równoważne:*

1. AC ,

2. $(\forall x)(x \neq \emptyset \longrightarrow (\exists f) f \in X^{P(x)} \wedge (\forall A)\ (A \in P(x) \wedge A \neq \emptyset \longrightarrow f(A) \in A))$,

3. $(\forall \mathcal{A})\mathcal{A} = \{A_t : t \in T\} \neq \emptyset \longrightarrow \prod \mathcal{A} = \prod_{t \in t} A_t \neq \emptyset$.

W punkcie (2) funkcja f nazywana jest funkcją wyboru (i f jest elementem uogólnionego produktu kartezjańskiego $\prod_{A \in P(x)\setminus\{\emptyset\}} A$). **Dowód.** *[Dowód (1) → (2)] Niech będzie dan niepusty zbiór x. Utwórzmy zbiór*

$$z = \{\{a\} \times a :\ a \in P(x) \wedge a \neq \emptyset\}.$$

Wtedy dla każdego niepustego $a \in P(x)$ zbiór $\{a\} \times a \in z$ jest niepusty, ponadto, dla różnych $a, b \in P(A)$ $\{a\} \times a \cap \{b\} \times b \neq \emptyset$. Na mocy założenia, AC *jest spełniony więc jest zbiór y taki, że dla dowolnego niepustego $a \in P(x)$ $y \cap \{a\} \times a$ jest jednoelementowy. Wtedy*

$$(\exists t)(\forall s) s \in y \cap \{a\} \times a \longrightarrow t = s.$$

Niech $t \in y \cap \{a\} \times a$ to istnieje jedyne $b \in a$ takie, że $t = (a, b)$. Niech

$$f = \{t \in y :\ (\exists a \in P(x))(\exists b \in a)\ t = (a, b)\}.$$

Zauważmy, że f jest funkcją wyboru zbioru x. ■

Dowód. *[Dowód (2) → (3)] Niech $\mathcal{A} = \{A_t : t \in T\}$ będzie niepustą rodziną zbiorów niepustych. Niech $x = \bigcup_{t \in T} A_t$, to z punktu (2) wynika, że istnieje funkcja wyboru $f : P(x) \to x$ taka, że dla każdego niepustego $a \in P(x)$ $f(a) \in a$. Ponieważ dla każdego $t \in T$ $A_t \in P(x)$ i $A_t \neq \emptyset$, to*

$$g = \{(u, v) \in f :\ (\exists t \in T) u = A_t\}$$

jest funkcją taką, że $dom(g) = \{A_t :\ t \in T\}$ i $g(A_t) = f(A_t) \in A_t$. Ostatecznie definiujemy $h = \{(t, b) :\ t \in T \wedge b = g(A_t)\}$. Zauważmy, że $h \in \prod_{t \in T} A_t$, bo $h(t) = g(A_t) \in A_t$ zachodzi dla każdego $t \in T$, co należało dowieść. ■

Dowód. *[Dowód (3) → (1)] Niech x będzie niepustą rodziną zbiorów niepustych parami rozłącznych. To wtedy*

$$x = \{a :\ a \in x\} = \{A_t :\ t \in T\}$$

gdzie $T = x$ i dla każdego $t \in T$ $A_t = t$. Z założenia dla każdego $t \in T$ $A_t \in x$ i $A_t \neq \emptyset$ oraz dla każdych $s, t \in T$ takich, że $T \neq s$ mamy $A_t \cap A_s = \emptyset$. Na mocy założenia, że (3) jest spełnione mamy

$$(\exists f) f \in \prod_{t \in T} A_t \neq \emptyset$$

Niech $y = \{f(t) :\ t \in T\}$. Pokażemy, że y jest żadanym zbiorem czyniącym zadośćuczynienia AC *. Niech $a \in x$ to jest $t \in T$ takie, że $A_t = a$ $(t = a)$. Wtedy $f(t) \in A_t = a$ więc $y \cap a \neq \emptyset$. Ponieważ dla róznych $s, t \in T$ $A_t \cap A_s = \emptyset$, to wtedy $y \cap a$ jest jednoelementowy.*
■

7.2 Jeszcze o aksjomacie nieskończoności

Wśród aksjomatów teorii mnogości są **aksjomat ekstensjonalności**, **aksjomat pary**, **aksjomat sumy**, **aksjomat nieskończoności** *oraz* **ufundowania** *których brzmienie jest następujące:*

Aksjomat ekstensjonalności (AE) $(\forall x)(\forall y)\ \ x = y \longleftrightarrow ((\forall t)\ t \in x \longleftrightarrow t \in y)$,

Aksjomat pary (APair) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t) t \in z \longleftrightarrow (t = x \vee t = y)$,

Aksjomat sumy (AU) $(\forall x)(\exists y)(\forall t)\ \ t \in y \longleftrightarrow (\exists u \in x) t \in u$,

Aksjomat potęgowania (AP) $(\forall x)(\exists y)(\forall t)\ (t \in y) \longleftrightarrow ((\forall s) s \in y \longrightarrow s \in t)$

Aksjomat wyróżniania (AW) *Niech* $\phi \in \mathcal{L}(\in)$ *będzie formułą języka teorii mnogości, p skończony wektor parametrów. To wtedy mamy* $(\forall x)(\exists y)(\forall t)\quad (t \in y \longleftrightarrow t \in x \wedge \phi(t,p))$,

Aksjomat nieskończoności (AInf) $(\exists x)\ \emptyset \in x \wedge (\forall t \in x) t \cup \{t\} \in x$,

Aksjomat ufundowania (AF) $(\forall s)(s \neq \emptyset \longrightarrow (\exists x \in s) x \cap s = \emptyset)$.

W aksjomacie pary, zbiór z jest jedyny na podstawie AE i oznaczamy przez $\{x,y\}$, dalej przez $\{x\}$ oznaczamy zbiór $\{x,x\}$. W aksjomacie sumy zbiór y oznaczamy przez $\bigcup x$ który jest jedyny na mocy (AE). W aksjomacie potegowania zbiór y oznaczamy przez $P(x)$. W aksjomacie wyróżniania y jest jedynym takim zbiorem na mocy (AE) i y oznaczamy przez $\{t:\ t \in x \wedge \phi(t,p)\}$ albo prosciej $\{t \in x:\ \phi(t,p)\}$. Dla dowolnych zbiorów a i b, niech $a \cup b = \bigcup\{a,b\}$.

Mamy nastepujący fakt:

Fakt 7.2.1 $(\forall x)(\neg(x \in x))$.

Dowód. *Niech x bedzie takim zbiorem dla którego zachodzi $x \in x$. Rozważmy następujący zbiór:*

$$s = \{t:\ t \in x \wedge t \in t\}.$$

Oczywiście zbiór ten jest niepusty ponieważ jego elementem jest sam x. Z (AF) mamy taki $t \in s$ $s \cap t = \emptyset$ ale $t \in t$ oraz $t \in s$ tak więc $t \in s \cap t$ więc $\neg(s \cap t = \emptyset)$. ■

Zamiast $\neg(x \in y)$ będziemy pisać $x \notin y$. Powiemy że $a \subseteq b$ wtedy i tylko wtedy gdy $(\forall t)\ t \in a \longrightarrow t \in b$, w miejsce $\subseteq$ możemy też wstawić $\subset$.

Uwaga 7.2.1 *Z faktu 7.2.1 wynika to, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów to jest*

$$\neg((\exists x)(\forall t) t \in x).$$

Gdyby taki zbiór x istniał, to że jest jest on zbiorem, mielibyśmy $x \in x$ co jest niemożliwe.

Aksjomat nieskończoności mówi że instnieje zbiór x, który jest induktywny. W tym zbiorze możemy wprowadzić relację $<$ w taki sposób:

$$(\forall a, b \in x) \ \ (a < b \longleftrightarrow a \in b).$$

Niech $z = \{y \in P(x) : AInf(y)\}$ będzie zbiorem podzbiorów x które spełniaja $(AInf)$. Jest on niepusty ponieważ sam x do niego należy. Z (AF) jest taki $\omega \in z$ taki że $\omega \cap z = \emptyset$. Dla $t \in \omega$ niech $t+1 = t \cup \{t\}$ oraz $0 = \emptyset$. Widzimy natychmiast $t \in t+1$ a więc $t < t+1$, zauważmy że $0 + 1 = \emptyset \cup \{0\} = \{0\}$, tak więc przez 1 bedziemy oznaczać $\{0\}$.

Twierdzenie 7.2.1 *Istnieje $\subset$-minimalny zbiór induktywny, to znaczy*

$$(\exists \omega)((\neg(\exists x) x \subset \omega \wedge x \neq \omega \wedge x \text{ jest induktywny}).$$

Dowód. *Na mocy $(AInf)$ istnieje x kóry jest induktywny a z poprzedniej uwagi, istnieje ω, który jest $\subset$-minimalnym podzbiorem zbioru induktywnego x. Niech będą dwa zbiory induktywne x oraz y. Ponadto niech ω_x jest minimalnym induktywnym podzbiorem x a ω_y bedzie minimalnym podzbiorem induktywnym y. To $\omega_x \cap \omega_y$ jest też zbiorem induktywnym, zawartym w x oraz y. Wobec minimalności zbiorów ω_x i ω_y mamy $\omega_x = \omega_x \cap \omega_y$ oraz $\omega_y = \omega_x \cap \omega_y$, a stąd otrzymujemy równość $\omega_x = \omega_y$. Tak więc istnieje najmniejszy zbiór induktywny $\omega = \bigcap\{x : \ x \text{ jest induktywny}\}$.* ■

W teorii mnogości zbiór o którym mowa w powyższym twierdzeniu, oznaczmy przez ω. Ponadto widzimy że $\{0, 1, 1+1, (1+1)+1, \ldots\} \subset \omega$. Taki zbiór będziemy nazywać zbiorem liczb naturalnych i poza tym rozdziałem, oznaczać będziemy go przez $\mathbb{N}$ a każdy jego element nazywać będziemy liczbą naturalną.

Powiemy, że zbiór y jest tranzytywny wtedy i tylko wtedy gdy

$$(\forall t)(\forall x) \ (t \in x \wedge x \in y) \longrightarrow t \in y.$$

Fakt 7.2.2 *ω jest zbiorem tranzytywnym.*

Dowód. *Rozważmy następujący zbiór*

$$z = \{t \in \omega : \ \ t \subset \omega\}.$$

Zauważmy, że jest on induktywny. Oczywiście $\emptyset \in \omega$ oraz $\emptyset \subset \omega$ więc $\emptyset \in z$. Niech $t \in z$, to $t \in \omega$ oraz $t \subset \omega$. ω jest induktywny, więc $t \cup \{t\} \in \omega$. Ponadto, $t \in \omega$, więc $\{t\} \subset \omega$. Ponieważ $t \in z$ to również $t \subset \omega$ a więc $t \cup \{t\} \subset \omega$ więc $t \cup \{t\} \in z$, co świdczy, że z jest induktywnym podzbiorem ω, co wobec minimalności ω otrzymujemy równość $z = \omega$. Pokazemy teraz, że ω jest tranzyrywym zbiorem. Niech $t \in \omega$, to $t \in z$ a więc $t \subset \omega$, to oznacza, że jesli $s \in t$ i $t \in \omega$, to również $s \in \omega$, co kończy dowód naszego faktu. ■

Fakt 7.2.3 *$(\omega, \in)$ jest relacją tranzytywną.*

Dowód. *Wystarczy pokazać, że każdy element ω jest tranzytywny. Niech $z \subseteq \omega$*

$$z = \{t \in \omega : \ \ t \text{ jest tranzytywny}\}.$$

Pokażemy, że zbiór z jest zbiorem induktywnym. Oczywiście $\emptyset \in \omega$ jest zbiorem tranzytywnym. Niech $t \in Z$, pokażemy, że $t \cup \{t\}$ jest również w z. ω jest zbiorem induktywnym i $t \in \omega$ więc $t \cup \{t\} \in \omega$. Niech $s \in t \cup \{t\}$, to albo $s \in t$ albo $s = t$. Niech $s \in t$, ponieważ t jest tranzytywny, to $s \subset t$ ale $t \subset t \cup \{t\}$ więc $s \subset t \cup \{t\}$. Natomiast, jeśli $s = t$, to $s \subset t \subset t \cup \{t\}$. Tak więc $t \cup \{t\} \in \omega$ i jest tranzytywny, stąd jest również elementem zbioru z. Zbiór z jest induktywnym podzbiorem ω, co wobec minimalności ω zbiory te są równe $z = \omega$. ■

Pokażemy, nastepujący fakt.

Fakt 7.2.4 *$(\forall x)$ $(x, <)$, (tutaj $<=\in$) spełnia następujace własności:*

1. *$(\forall t \in x)$ $\neg(t < t)$,*
2. *$(\forall y \in P(x))$ $(y \neq \emptyset) \longrightarrow (\exists t \in y)(\neg(\exists r \in y)(r < t))$.*

Dowód. *Pierwsza własność wynika wprost z poprzedniego faktu oraz z $<=\in$. Niech teraz $y \subseteq x$ będzie niepustym podzbiorem $tr(x)$. To na mocy (AF), jest takie $t \in y$ że $t \cap y \neq \emptyset$. W takim razie $\neg(\exists r \in y) r \in t$ tj. $\neg(\exists r \in y) r < t$ a to właśnie oznacza że t jest $<$-minimalnym elementem zbioru y, co kończy dowód naszego faktu.* ■

Wniosek 7.2.1 *Uporządkowana para $(\omega, <)$ spełnia nastepujące własności:*

1. *$(\forall t \in \omega)$ $\neg(t < t)$,*
2. *$(\forall r, s, t \in \omega)$ $r < s \wedge s < t \longrightarrow r < t$,*
3. *$(\forall y \in P(\omega))$ $(y \neq \emptyset) \longrightarrow (\exists t \in y)(\neg(\exists r \in y)(r < t))$.*

Twierdzenie 7.2.2 (Twierdzenie indukcji matematycznej) *Jesli z jest zbiorem takim że*

1. *$0 \in z$ oraz*
2. *$(\forall n \in \mathbb{N})((\forall m < n)(m \in z)) \longrightarrow n \in z$,*

to wtedy $\omega \subset z$.

Dowód. *Załóżmy, że teza jest nieprawdziwa, więc $s = \{n \in \omega : \ \ n \notin z\}$ jest niepusty, to jest takie $n \in s$, że n jest $\in$-minimalnym elementem zbioru s. Z założenia pierwszego $0 < n$, oraz z minimalności n $(\forall m \in n) m \in z$, więc z drugiej własności mamy $n \in z$ co prowadzi do sprzeczności.* ■

Pokażemy, że ω spełnia aksjomaty Peano.

Twierdzenie 7.2.3 *Zbiór* $\mathbb{N}$ *wraz z funkcją* $\mathbb{N} \ni n \mapsto n+1 \in \mathbb{N}$ *spełnia następujące własności:*

1. $0 \in \omega$,
2. $\neg(\exists n \in \omega)\ n+1 = 0$,
3. $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \neq 0 \longrightarrow (\exists m \in \omega)\ n = m+1$,
4. $(\forall m, n \in \omega)\ \ m \neq n \longrightarrow m+1 \neq n+1$,
5. *spełniona jest twierdzenie o indukcji matematycznej.*

Dowód. *Pierwsza druga oraz ostatnia własność w tym twierdzeniu zostały wykazane wcześniej. Udowodnimy własność trzecią. Niech*

$$s = \{n \in \omega : n = 0 \vee (\exists m \in \omega)\ n = m+1.$$

Pokażemy, że s *jest induktywny. Oczywiście* $0 \in s$, *niech* $n \in s$, *to* $n \in \omega$, *niech* $m = n$, *to* $n+1 = m+1$ *i oczywiście* $m \in \omega$ *a więc* $(\exists m)\ n+1 = m+1$. ω *jest induktywny i* $n \in \omega$, *więc* $n+1 \in \omega$ *a stąd* $n+1 \in s$. *Pokazaliśmy więc, że* s *jest induktywnym podzbiorem* ω *a więc* $s = \omega$ *wobec minimalności* ω. *Stąd otrzymujemy*

$$\omega = \{n \in \omega :\ \ n = 0 \vee (\exists m \in \omega)\ n = m+1\}.$$

Pokażemy prawdziwość przedostatniej własności. Niech $n \neq m$ *oraz* $n+1 = m+1$, *to wtedy jest* $t \in n$, *takie że* $t \notin m$ *lub odwrotnie. Załóżmy pierwszy wariant alternatywy. Oczywiście* $t \in n \subset n \cup \{n\} = n+1$. *Gdyby* $t \in m+1 = m \cup \{m\}$ *to wtedy* $t = m$ *więc* $m \in n$ *więc* $m+1 \in n+1$ *ale* $m+1 = n+1$ *to* $m+1 \in m+1$ *sprzeczność. Więc* $n+1 \neq m+1$. *Drugi wariant, analogicznie prowadzi do sprzeczności.* ■

Z przedostatniej własności powyższego twierdzenia dostajemy.

Twierdzenie 7.2.4 (Zasada indukcji matematycznej) *Jesli* z *jest zbiorem takim że*

1. $0 \in z$ *oraz*
2. $(\forall n \in \omega) n \in z \longrightarrow n+1 \in z$,

to wtedy $\mathbb{N} \subset z$.

Dowód. *Załóżmy, że teza jest nieprawdziwa, więc* $s = \{n \in \omega :\ \ n \notin z\}$ *jest niepusty, to jest takie* $n \in s$, *że* n *jest* $\in$*-minimalnym elementem zbioru* s. *Z założenia pierwszego* $0 < n$, *więc z* 3 *własności twierdzenia 7.2.3* $(\exists m \in \mathbb{N}) m+1 = n$ *a wobec minimalności* n *wiemy że* $m \in z$, *co z drugiej własności wynika że* $n = m+1 \in z$, *co prowadzi do sprzeczności.* ■

7.3 Konstrukcja liczb rzeczywistych*

W tej sekcji przedstawimy konstrukcję liczb rzeczywistych spełniających aksjomaty wypisane na początku rozdziału w oparciu o przedziały Dedekinda.

Niech $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *będzie ciałem liczb wymiernych z naturalnym porządkiem liniowym* $\leq$. *Podzbiór* $A \subset \mathbb{Q}$ *nazywamy przedziałem wtedy i tylko wtedy gdy*

1. A *jest ograniczony z góry*

2. *jeśli* $y < x \in A$ *to* $y \in A$.

Mówimy, że przedział $A \subset \mathbb{Q}$ *jest bez końca wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego* $x \in A$ *istnieje* $y \in A$ *taki że* $x < y$. *Zdefiniujemy* $(\mathbb{R}, <)$ *w sposób następujący:*

$$x \in \mathbb{R} \longleftrightarrow x \subset \mathbb{Q} \text{ jest przedziałem bez końca.}$$

Niech $x, y \in \mathbb{R}$ *to* $x \leq y$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $x \subset y$. *Zachodzi następujące twierdzenie*

Twierdzenie 7.3.1 *Zbiór* $(\mathbb{R}, \leq)$ *jest liniowym porządkiem zupełnym tzn.*

1. $\forall x \in \mathbb{R} \;\; x \leq x$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; x \leq y \wedge y \leq x \longrightarrow x = y$

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \;\; x \leq y \wedge y \leq z \longrightarrow x \leq z$

4. $\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; x < y \vee x = y \vee y < x$ *gdzie* $x < y \longleftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$.

5. *jeśli* $A \subset \mathbb{R}$ *jest ograniczony z góry, to istnieje najmniejsze jego ograniczenie.*

Dowód. *Jedynie nietrywialnym warunkiem jest ostatni z nich. Niech* $A \subset \mathbb{R}$ *jest zbiorem ograniczonym w* $\mathbb{R}$, *to istnieje* $x_0 \in \mathbb{R}$ *że dla każdego* $x \in A$ $x \leq x_0$. *Niech* $z = \bigcup_{x \in A} x$, *pokażemy wpierw że* z *jest przedziałem w* $\mathbb{Q}$ *(tzn.* $z \in \mathbb{R}$*).*

1) ograniczoność *Ponieważ dla każdego* $x \in A$ $x \leq_{\mathbb{R}} x_0$ *to dla każdego* $x \in A$ $x \subset x_0$ *a więc* $z = \bigcup_{x \in A} x \subset x_0$ *więc* z *jest ograniczony w* $\mathbb{Q}$ *(bo* x_0 *jest ograniczony w* $\mathbb{Q}$*).*

2) *Niech* $u <_{\mathbb{Q}} v \in z = \bigcup_{x \in A} x$, *to wtedy istnieje* $x \in A$ *że* $v \in x$ *ale* x *jest przedziałem w* $\mathbb{Q}$ *i* $u <_{\mathbb{Q}} v \in x$ *więc* $u \in x$ *stąd* $u \in \bigcup_{x \in A} x$ *a więc* $u \in z$. *Udowodnimy, że* z *nie ma końca. Niech* $u \in z$ *to istnieje* $x \in A$ *że* $u \in x$ *ale* x *nie ma końca to istnieje* $t_x \in x$ *że* $u < t_x$ *stąd* $t_x \in z = \bigcup_{x \in A} x$ *a więc istnieje* $t_x \in z$ *że* $x < t_x$ *stąd ostatecznie* $z \in \mathbb{R}$. *Oczywiście dla każdego* $x \in A$ $x \subset z$ *a więc* $x \leq_{\mathbb{R}} z$ *dla każdego* $x \in A$.

Pozostało jedynie udowodnić że z *jest najmniejszym ograniczeniem zbioru* A *w* $(\mathbb{R}, \leq)$. *Przypuśćmy że istnieje* $\mathbb{R} \ni z' < z$ *takie że jest ograniczeniem zbioru* A, *więc* $z' \subset z$ *i jednocześnie* $v \in z \setminus z' = \bigcup_{x \in A} x \setminus z \neq \emptyset$. *Istnieje więc* $x \in A$ *że* $v \in x$ *i* $v \notin z'$. x *i* z' *jest przedziałem stąd* $z' \subset x$ *i* $z' \neq x$ *stąd* $z' < x$ *i z drugiej strony* $A \ni x \leq z'$ *a więc* $z' < z'$ *a stąd* $z' \neq z'$ *co jest niemożliwe.* ■

Teraz zdefiniujemy działania zgodne porządkiem w w zbiorze licz rzeczywistych.

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto x + y := \{u + v : \ u \in x \wedge v \in y\}.$$

Zamiast $+(x, y)$ *będziemy pisać* $x + y$. *Zachodzi następujący fakt*

Fakt 7.3.1 *Zbiór* $(\mathbb{R}, +)$ *jest grupą abelową.*

Dowód. *Niemal oczywisty.*

łączność *Niech* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *to wtedy*

$$\begin{aligned}(x + y) + z =&\{u + v : \ (u, v) \in x \times y\} + \{t : \ t \in z\} = \{(u + v) + t; \ (u, v, t) \in x \times y \times z\} \\ =&\{u + (v + t); \ (u, v, t) \in x \times y \times z\} = \{u; \ u \in x\} + \{v + t : \ (v, t) \in y \times z\} \\ =&x + (y + z).\end{aligned}$$

element neutralny

$$x + 0 =\{u + v : \ (u, v) \in x \times 0\} = \{u + 0 : \ u \in x\} = \{u : \ u \in x\} = x,$$

ponieważ $v \in 0$ *to* $u + v < u \in x$ *więc* $u + v \in x$ *i w drugą stronę* $u \in x$ *to istnieje* $u' \in x$ *i* $v \in 0$ *że* $u = u + v$.

element przeciwny

$$x + (-x) =\{u + v : \ (u, v) \in x \times (-x)\} = \{u : u \in 0\}.$$

przemienność

$$x + y = \{u + v : \ (u, v) \in x \times y\} = \{v + u : \ (v, u) \in y \times u\} = y + u,$$

co kończy dowód naszego faktu. ■

Teraz zdefiniujemy działanie mnożenia w $\mathbb{R}$. *Niech* $x, y \in \mathbb{R}$ *to*

$$xy = \begin{cases} \{t \in \mathbb{Q} : \ (\exists (u, v) \in x \times y) \ 0 \leq u, v \wedge t < uv\} & \text{dla } x, y > 0 \\ \{t \in \mathbb{Q} : \ (\exists (u, v) \in x \times y) \ 0 \leq x \wedge t < uv\} & \text{dla } x \geq 0 \wedge y < 0 \\ \{t \in \mathbb{Q} : \ (\exists (u, v) \in x \times y) \ 0 \leq y \wedge t < uv\} & \text{dla } y \geq 0 \wedge x < 0 \\ \bigcup\{t \in \mathbb{Q} : \ (\exists s \in \mathbb{Q}) t < s \wedge s \in \bigcap\{w \in \mathbb{Q} : (\exists (u, v) \in x \times y) \ w < uv\}\} & \text{dla } x, y < 0 \end{cases}.$$

Powyższe działanie jest poprawnie okreslone, gdyż w każdym wymienionych przypadków jako wynik otrzymujemy przedział bez końców.

Analogicznie można udowodnić analogicznie nastepujący fakt.

Fakt 7.3.2 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *jest ciałem.*

Dowód tego faktu może nie jest zbyt trudny ale niestety żmudny, więc go pominiemy.

7.4 Przestrzenie zupełne

W wielu gałęziach matematyki współczesnej zupełne przestrzenie metryczne odgrywają bardzo ważną rolę. Bez niej wiele zagadnień nie doczekałyby się rozwiązania. Teeoria równań rózniczkowych, czy też równań funkcyjnych są tego najlepszym przykładem. Istnienie rozwiązań pewnego typu równań różniczkowych jest zagwarantowane przez twierdzenie Banacha o punkcie stałym. Twierdzenie to dotyczy zupełnych przestrzeni metrycznych. Na potrzeby tej notatki przyjmijmy oznaczenia: $\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{R}$ zbiór liczb rzeczywistych, dla zbiorów X, Y przez Y^X oznaczamy zbiór wszystkich funkcji z X do Y. W szczególności $X^{\mathbb{N}}$ oznacza zbiór wszystkich ciągów o wartościach w zbiorze X.

Zaczniemy od definicji warunku Cauchy,ego.

Definicja 7.4.1 (Warunek Cauchy'ego) *Powiemy, że w przestrzeni metrycznej (X, d) ciąg $x \in X^{\mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego jeżeli:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall, m, n \in \mathbb{N})(n_0 < m, n \longrightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon).$$

Ciąg w ustalonej przestrzeni metrycznej nazywamy ciągiem Cauchy'ego jeżeli spełnia warunek Cauchy'ego podany powyżej. Ciąg Cauchy'ego nazywamy też ciągiem podstawowym.

Definicja 7.4.2 (Przestrzeń metryczna zupełna) *Przestrzeń metrczna jest zupełna wtedy gdy każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.*

Twierdzenie 7.4.1 *Każda przestrzeń euklidesowa $(\mathbb{R}^n, d_e)$ jest przestrzenią zupełną.*

Dowód. *Z kursu analizy matematycznej 1, wiemy że ciąg liczbowy jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunek Cauchego w $(\mathbb{R}, d_e)$. Korzystając z faktu, że każdy ciąg w $\mathbb{R}^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy ciąg i-tych współrzędnych naszego ciągu jest zbieżny dla dowolnego $i \in \{1, \dots, n\}$, otrzymujemy jako wniosek, że $(\mathbb{R}^n, d_e)$ jest zupełna.* ■

Przestrzeń liczb wymiernych z odległością zdefiniowaną przez wartość bezwzględną nie jest przestrzenią zupełną. Tak jest ponieważ istnieje ciąg liczb wymiernych $x \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ który jest zbieżny do $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Natomiast Twierdzenie 7.4.1 mówi, że każda przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią metryczną zupełną.

Przypomnijmy, że przestrzeń metryczna jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy każdy ciąg w tej przestrzeni ma podciąg zbieżny. Ponadto, w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ zbiór jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest ograniczony i domknięty w $(\mathbb{R}^n, d_e)$. Wprost z definicji zwartości przestrzeni metycznej, mamy następujący fakt.

Fakt 7.4.1 *Każda zwarta przestrzeń metryczna jest zupełna.*

Udowodnimy, że zbiór wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłyn na ustalonej przestrzeni zwartej X stanowi przestrzeń zupełną z metryką określoną na dowolnych $f, g \in \mathcal{C}(X)$

$$\rho(f, g) = \sup\{f(x) - g(x)| : \ x \in X\}$$

zwaną dalej metryką zbieżności jednostajnej. Wspomniana przestrzeń nazywamy przestrzenią funkcyjną i znaczamy przez $\mathcal{C}(X)$. Twierdzenie o zupełności przestrzeni $\mathcal{C}(X)$ (gdy X jest zwarta) poprzedzimy dowodem twierdzenia o zbieżności jednostajnej.

Definicja 7.4.3 (Jednostajna zbieżność) *Niech X będzie niepustym zbiorem, to ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^X)^{\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do $g \in \mathbb{R}^X$ jeżeli*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in X)\ |f_n(x) - g(x)| < \epsilon.$$

Twierdzenie 7.4.2 *Niech (X, d) będzie przestrzenią zwartą. Jeżeli ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(X)$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $g \in \mathbb{R}^X$, to g jest ciągła na X, tzn. $g \in \mathcal{C}(X)$.*

Dowód. *Niech ciąg funkcji ciągłych $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na X będzie jednostajnie zbieżny do funkcji $g \in \mathbb{R}^X$. Niech $\epsilon > 0$, to jest $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $x \in X$ i każdego $n > n_0$ mamy*

$$|f_n(x) - g(x)| < \epsilon/3.$$

Wybierzmy, $m = n_0 + 1$. Oczywiście f_m jest ciągła w każdym $x \in X$. Więc dla każdego $x \in X$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $y \in X$ i $d(x, y) < \delta$, to $|f_m(x), f_m(y)| < \epsilon/3$ a stąd

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(y)| + |f_m(y) - g(y)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon.$$

■

Twierdzenie 7.4.3 *Jeżeli (X, d) jest zwartą przestrzenią metryczną, to $(\mathcal{C}(X), \rho)$ jest zupełna.*

Dowód. *Niech będzie dany ciąg podstawowy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(X)^{\mathbb{N}}$. Ustalmy dowolne $x \in X$, to $(f(x)_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ jest też ciągiem podstawowym na prostej rzeczywistej. Z zupełności $(\mathbb{R}, d_e)$ ($d_e(u, v) = |u - v|$) istnieje jedyna liczba rzeczywista y, taka, że $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Niech $g(x) = y$, wobec dowolności $x \in X$ mamy funkcję $g : X \to \mathbb{R}$ taką, że*

$$(\forall x \in X)\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x).$$

Ponieważ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest podstawowy, to spełnia warunek

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) m, n > n_0 \longrightarrow \rho(f_n, f_m) < \epsilon.$$

Ponieważ dla każdego $x \in X$ i każdych m, n mamy

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup\{|f_n(y) - f_m(y)| :\ y \in X\} = \rho(f_n, f_m).$$

Stąd mamy

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(\forall x \in X)\ \ m, n > n_0 \longrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Pokażemy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do g. Niech $\epsilon > 0$, to jest $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n, m > n_0$ i każdego $x \in X$ zachodzi

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon/2.$$

Ale $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ *dla każdego* $x \in X$. *Wtedy dla każdego* $x \in X$ *istnieje* $n_x \in \mathbb{N}$ *taki, że* $m > n_x$, *to* $|f_m(x) - g(x)| < \epsilon/2$. *W takim razie, wymierzmy* $m \in \mathbb{N}$ *takie, że* $n_0, n_x < m$ *a stąd mamy: jeśli* $n > n_0$ *to*

$$|f_n(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - g(c)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Wobec dowolności $\epsilon > 0$ *mamy*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in X)\ n_0 < n \longrightarrow |f_n(x) - g(x)| < \epsilon.$$

Więc udowodniliśmy zbieżność jednostajną ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *do funkcji* $g \in \mathbb{R}^X$. *Korzystając z Twierdzenia 7.4.2 nasza funkcja jest ciągła na* X, *więc* $g \in \mathcal{C}(X)$. *Wobec dowolności wyboru ciągu podstawowego* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \underline{\mathcal{C}(X)}^{\mathbb{N}}$, *mamy zupełność przestrzeni* $\mathcal{C}(X)$. ■

Ponieważ dla każdego $\underline{x \in \mathbb{R}^n}$ *kula* $\overline{B(x,r} \subseteq \mathbb{R}^n$ *jest zbiorem zwartym (jako ograniczony i domknięty w* $\mathbb{R}^n$*), to* $\mathcal{C}(\overline{B(x,r)})$ *jest przestrzenią zupełną, w szczagólności* $\mathcal{C}([0,1])$ *jest przesttzenią zupełną.*

Poniższe twierdzenie podaje pełny opis podprzestrzeni zupełnych w przestrzeni zupełnej.

Twierdzenie 7.4.4 *Niech* (X, d) *będzie zupełną przestrzenią metryczną oraz* $A \subseteq X$. *Wtedy*

$$(A, d \restriction (A \times A) \text{ zupełna }) \longleftrightarrow A = \overline{A}.$$

gdzie

$$\overline{A} = \bigcap \{F :\ F \subseteq X \text{jest domknięty w } X \wedge A \subseteq F\}$$

jest domknięciem zbioru A.

Dowód. *Załóżmy, że* A *jest zupełnym podzbiorem* X. *Niech* $a = (a_n)_{\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *bedzie zbieżnym do* $g \in X$. *To* a *jest ciągiem Cauchyego (podstawowym w* X*). Z uzpełności wynika, że istnieje granica ciągu* a, *powiedzmy, ze jest to* $g' \in A$. *Zauważmy, że jeśli* $\lim_{n\to\infty} a_n = g'$, *to z jednoznaczności granicy ciągu zbieżnego wynika, że* $g' = g$. *Więc* $\lim_{n\to\infty} a_n = g \in A$.

Teraz przejdziemy do dowodu w drugą stronę. Załóżmy, że $A \subseteq X$ *jest domknięty w* X. *Wtedy dla każdego ciągu Cauchego* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *istnieje* $x \in A$ *takie, że* $x = \lim_{n\to\infty} a_n$. *Ponieważ* (X, d) *jest zupełna, to istnieje* $x \in X$ *takie, że* $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. *Ponieważ* A *jest domknięty i nasz ciąg jest zbieżnym ciągiem elementów zbioru* A, *to* $x \in A$. *Twierdzenie zostało udowodnione.* ■

Jednym z kluczowych twierdzeń w teorii przestrzeni zupełnych jest twierdzenie Cantora.

Twierdzenie 7.4.5 (Cantor) *Niech* (X, d) *będzie zupełną przestrzenią metryczną, i niech będzie dany ciąg* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *podzbiorów* X *taki, że dla każdego* $n \in \mathbb{N}$

1. $\emptyset \neq F_{n+1} \subseteq F_n$,

2. $F_n = \overline{F_n}$,

3. $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$,

to istnieje $x \in X$ taki, że $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$. Tutaj dla $A \subseteq X$,

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) :\ x,y \in A\}$$

jest średnicą zbioru A.

Dowód. *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wybieramy $x_n \in F_n$. Pokażemy, że ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Niech $\epsilon > 0$, to jest $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnych $n > n_0$, $\delta(F_n) < \epsilon$. Niech $m,n > n_0$, to z punktu 1) $F_n \subseteq F_{n_0+1}$ i $F_m \subseteq F_{n_0+1}$ a stąd $n_m, x_n \in F_{n_0+1}$. Ponieważ $\delta(F_{n_0+1}) < \epsilon$, to $d(x_m,x_n) < \epsilon$. Tak więc nasz ciąg jest ciągiem Cauchy'ego. Ponieważ (X,d) jest zupełna, to istnieje $x \in X$ takie, że $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Udowodnimy, że $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Niech $n \in \mathbb{N}$ dowolne, to dla każdego $k \geq n$ mamy $x_k \in F_k \subseteq F_n$. Ale $(x_{n+k})_{k\in\mathbb{N}}$ jest podciągiem ciągu $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, więc*

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} x_{n+k}.$$

Ponieważ F_n jest zbiorem domkniętym, to $x = \lim_{k\to\infty} x_{n+k} \in F_n$. Więc $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, to $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ jest jednopunktowy. ■

Twierdzenie Banacha o punkcie stałym jest jednym z najważniejszych twierdzeń w całej matematyce. Wspomniane twierdzenie ma wiele różnych zastosowań w matematyce. Po przeprowadzeniu dowodu twierdzenia Banacha przejdziemy do zastosowania w rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych.

Twierdzenie 7.4.6 (Twierdzenie Banacha) *Niech (X,d) będzie zupełną przestrzenią metryczną. Niech $F : X \to X$ będzie odwzorowaniem zwężającym, to znaczy:*

$$(\exists c \in (0,1))(\forall x,y \in X)\ (d(F(x),F(y)) \leq c \cdot d(x,y).$$

to istnieje dokładnie jedno $z \in X$ takie że $F(z) = z$.

Dowód. *Niech $x \in X$ będzie dowolnym punktem naszej przestrzeni. Definiujemy ciąg $y \in X^{\mathbb{N}}$ następująco:*

$$y_0 = x \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(y_{n+1} = F(y_n)).$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n dla dowolnego $x \in X$ mamy

$$d(F^n(x),F^{n+1}(x)) \leq c \cdot d(F^{n-1}(x),F^n(x)) \leq \ldots \leq c^n \cdot d(x,F(x)).$$

Pokażemy, że ten ciąg jest podstawowy. Wpierw zauważmy, że jeśli m,n są liczbami naturalnymi $m < n$, to wtedy

$$\begin{aligned}
d(y_m,y_n) \leq& d(y_m,y_{m+1}) + d(y_{m+1},y_{m+2}) + \ldots + d(y_{n-1},y_n)\\
=& d(F^m(x),F^{m+1}(x) + d(F^{m+1}(x),F^{m+2}(x)) + \ldots d(F^{n-1}(x),F^n(x))\\
\leq& c^m d(x,F(x)) + c^{m+1} d(x,F(x)) + \ldots + c^{n-1} d(x,F(x))\\
\leq& d(x,F(x)) \sum_{k=0}^{\infty} c^{m+k} = d(x,F(x)) \cdot \frac{c^m}{1-c}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $c \in (0,1)$, to $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$ a stąd dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ jeśli $n_0 < m, n$ to wtedy $d(y_m, y_n) < \epsilon$. Stąd y jest ciągiem podstawowym w przestrzeni X a więc zbieżny, bo X jest przestrzenią zupełną. Istnieje więc $z \in X$ takie że $z = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} F^n(x)$. Pokażemy, że $F(z) = z$.

Dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej $\epsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że dla dowolnego $n > n_0$ zachodzi $d(F^n(x), z) < \frac{\epsilon}{2}$. Wybierzmy liczbę naturalną n, taką, że $n - 1 > n_0$, to wtedy

$$d(F(z), z) \leq d(F(z), F^n(x)) + d(F^n(x), z) \leq c \cdot d(z, F^{n-1}(x)) + d(F^n(x), z) < \epsilon.$$

Ponieważ powyższa nierówność zachodzi dla każdego $\epsilon > 0$, więc z jest punktem stałym odwzorowania F, czyli mamy $F(z) = z$. Pokażemy jedyność punktu stałego. Niech $z, z' \in X$ będą punktami stałymi, to wtedy

$$d(z, z') = d(F(z), F(z')) \leq c \cdot d(z, z') \longrightarrow d(z, z') = 0 \longrightarrow z = z'.$$

Pierwsza implikacja wynika z faktu, że $0 \leq c < 1$, natomiast druga wynika z definicji metryki d. ■

7.5 Twierdzenie o funkcji odwrotnej

Twierdzenie 7.5.1 (O funkcji odwrotnej) *Niech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_0 \in U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$, U-otwarty. Załóżmy, że $f : D \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją, taką, że*

1. *wszystkie pochodne czastkowe pierwszego rzędu istnieją i są ciągłe na zbiorze otwartym U,*

2. *jakobian $J_f(x_0)$ jest macierzą nieosobliwą.*

Wtedy istnieją zbiory otwarte $U_1 \subseteq U$, i $W \subseteq \mathbb{R}^n$ takie, że

- *f jest bijekcją pomiędzy U_1 a W,*

- *istnieje $g : W \to U_1$, które jest odwrotna do $f \restriction U_1$, różniczkowalna na W,*

- *dla każdych $x \in U_1$, $y \in W$ jeżeli $y = f(x)$, to $J_g(y) = (J_f(x))^{-1}$.*

Dowód twierdzenia o funkcji odwrotnej poprzedzimy lematem.

Lemat 7.5.1 *Jeżeli $M > 0$, $U \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, $g : D \to \mathbb{R}^n$ będzie taka, że*

1. *$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)$ istnieje i jest ciągła dla każdego $x \in U$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,*

2. *$\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right| \leq M$ dla każdego $x \in U$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,*

to

$$(\forall x, y \in U) \ \ \|g(x) - g(y)\| \leq nM\|x - y\|.$$

Dowód. *[Dowód lematu] Niech $x, y \in U$, to wtedy*

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(y)\| =& \Big\| \sum_{j=1}^{n} (g(x_1, \dots x_j, y_{j+1}, \dots, y_n) - g(x_1, \dots x_{j-1}, y_j, \dots, y_n)) \Big\| \\
\leq& \sum_{j}^{n} \|(g_1(x_1, \dots x_j, y_{j+1}, \dots, y_n) - g_i(x_1, \dots x_{j-1}, y_j, \dots, y_n), \dots \\
\dots,& g_n(x_1, \dots x_j, y_{j+1}, \dots, y_n) - g_n(x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, \dots, y_n)\| \\
=& \sum_{j}^{n} (\sum_{i=1}^{n} |g_i(x_1, \dots x_j, y_{j+1}, \dots, y_n) - g_i(x_1, \dots x_{j-1}, y_j, \dots, y_n)|^2)^{1/2} \\
=& \sum_{j}^{n} (\sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(c_{ij})(x_j - y_j)|^2)^{1/2} \\
\leq& \sum_{j}^{n} (\sum_{i=1}^{n} M(x_j - y_j)^2)^{1/2} = M \sum_{j}^{n} \|x - y\| = nM\|x - y\|.
\end{aligned}$$

■

Dowód. *Ponieważ f ma wszystkie pochodne cząstkowe na zbiorze otwartym U a więc jest różniczkowalna w x_0. Niech $A = J_f(x_0)$, i $h = A^{-f} \circ f : D \to \mathbb{R}^n$. Wtedy*

$$J_h(x_0) = J_{A^{-1} \circ f}(x_0) = J_{A^{-1}}(f(x_0)) J_f(x_0) = A^{-1} A = \mathbf{id}.$$

Tak więc dowodzone twierdzenie jst spełnonie dla f wtedy i tylko wtedy gdy jest prawdziwe dla funkcji h. Możemy też założyć, że $x_0 = \bar{0}$ i $f(x_0) = \bar{0}$.

Więc możemy założyć, że $J_f(x_0) = \mathbf{id}$. W takim razie mamy:

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - J_f(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = \frac{\|f(x) - x\|}{\|x\|}$$

W takim razie, definiując $\varphi(x) = f(x) - x$ mamy

$$f(x) = x + \varphi(x), \ \ i \ \lim_{x \to \bar{0}} \frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Zachodzi następujący Claim.

Claim 7.5.1 *Istnieje $r > 0$ takie, że*

- $(\forall x, x' \in B(\bar{0}, r)) \ \|(x - f(x)) - (x' - f(x'))\| \leq 1/2 \cdot \|x - x'\|,$
- $(\forall x, x' \in B(\bar{0}, r)) \ \|x - x'\| \leq 2 \cdot \|f(x) - f(x')\|.$

Dowód. *[Dowód Claimu] Niech $g(x) = x - f(x)$, to funkcja g ma wszystkie ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na całym zbiorze U. Zauważmy, że dla dowolnego $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial(\mathbf{id_i} - f_i)}{\partial x_j}(x) = \delta_{ij} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{0}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

Więc z ciągłości pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu mamy

$$\lim_{x \to \bar{0}} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = 0.$$

Istnieje $r > 0$ takie, że dla dowolnego $x \in B(\bar{0}, r)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \right| < \frac{1}{2n}.$$

Więc z Lematu 7.5.1 mamy:

$$(\forall x, x' \in B(\bar{0}, r) \ \|g(x) - g(x')\| \leq \frac{1}{2} \cdot \|x - x'\|.$$

Aby drugi punkt udowodnić, skorzystamy z części już udowodnionej. Korzystając z nierówności $\big| \|a\| - \|b\| \big| \leq \|a - b\|$, mamy

$$\|x - x'\| - \|f(x) - f(x')\| \leq \|(x - x') - (f(x) - f(x'))\| \leq \frac{1}{2} \cdot \|x - x'\|,$$

stąd mamy

$$\frac{1}{2} \cdot \|x - x'\| \leq \|f(x) - f(x')\|$$

a więc

$$\|x - x'\| \leq 2 \cdot \|f(x) - f(x')\|.$$

■

Claim 7.5.2 *Jeżeli $r > 0$ takie jak w Claim 7.5.1, to f jest $1 - 1$ na $B(\bar{0}, r)$*

Dowód. *[Dowód Claimu] Załóżmy, że dla $x, x' \in B(\bar{0}, r)$ $f(x) = f(x')$. Więc na mocy pierwszej nierówności w Claim 7.5.1 mamy*

$$\|x - x'\| = \|x - f(x) - (x' - f(x'))\| \leq \frac{1}{2} \cdot \|x - x'\|,$$

więc $\|x - x\| = 0$ a stąd $x = x'$. ■

Niech $y \in \mathbb{R}^n$, to $f(x) = y$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = x + y - f(x)$. Niech $T : D \to \mathbb{R}^n$ będzie zdefiniowane $T_y(x) = x - f(x) + y$. Więc mamy

$$y = f(x) \longleftrightarrow T_y(x) = x.$$

Niech $r > 0$ będzie takie jak w Claimie 7.5.1. Pokażemy, że dla dowolnego $y \in B(\bar{0}, r/2)$ przekształcenie T_y jest zwężające w $\overline{B(\bar{0}, r)}$, to znaczy, że zachodzi

- $T_y[\overline{B(\bar{0},r)}] \subseteq \overline{B(\bar{0},r)}$,
- $(\forall x,x' \in \overline{B(\bar{0},r)})\ \ \|T_y x - T_y x'\| \leq \frac{1}{2}\cdot\|x-x'\|$.

Zauważmy, że dla $x \in B(\bar{0},r)$, $y \in B(\bar{0},r/2)$ *mamy*

$$\|T_y x\| = \|x+y-f(x)\| \leq \|x-f(x)\| + \|y\| \leq r/2 + r/2 = r.$$

Nastepnie, z Claimu 7.5.1 mamy

$$\|T_y x - T_y x\| = \|(x+y-f(x)) - (x'+y-f(x'))\| = \|(x-f(x)) - (x'-f(x'))\| \leq \frac{1}{2}\cdot\|x-x'\|.$$

Tak więc każde T_y *spełnia założenia twierdzenia Banacha o punkcie stałym, zbiór* $\overline{B(\bar{0},r)}$ *jako domkniety w* $\mathbb{R}^n$ *jest przestrzenią zupełną na której działa* T_y. *Więc dla każdego* $y \in B(\bar{0},r/2)$ *istnieje* $x \in \overline{B(\bar{0},r)}$ *takie, że* $T_y x = x$ *a stąd* $y = f(x)$. *Udowodniliśmy więc, że*

$$B(\bar{0},r/2) \subseteq f[\overline{B(\bar{0},r)}].$$

Ponieważ, brzeg kuli $B(\bar{0},r)$ *jest zwarty (jako domknięty i ograniczony podzbiór* $\mathbb{R}^n$*) i* f *jest* $1-1$ *na* $\overline{B(\bar{0},r)}$, *to istnieje dodatnie* $r_0 < r/2$ *takie, że* $f[bd(B(\bar{0},r))] \cap B(\bar{0},r_0) = \emptyset$. *Na mocy powyższej inkluzji, mamy*

$$B(\bar{0},r_0) \subseteq f[B(\bar{0},r)].$$

Niech $W = B(\bar{0},r_0)$, *to ponieważ* f *jest ciągła,* W *otwarty i* f *jest* $1-1$ *w* $B(\bar{0},r)$ *(patrz Claim 7.5.2), to zbiór* $U_1 = f^{-1}[W] \subseteq B(\bar{0},r)$ *jest zbiorem otawrtym i* $f[U_1] = W$.

Claim 7.5.3 *Jeżeli* $r > 0$ *jest jak w Claim 7.5.1, to funkcja odwrotna* $f \restriction U_1$ *do* f^{-1} *na zbiorze* $W = f[U_1]$ *jest ciągła.*

Dowód. *[Dowód Claimu] Niech* $\epsilon > 0$ *i niech* $\delta < 1/2$. *Załóżmy, że* $y, y' \in W$ *są takie, że* $\|y-y'\| < \delta$. *Wtedy istnieją* $x, x' \in U_1$ *takie, że* $x = f^{-1}(y)$, $x' = f^{-1}(y')$. *Korzystajac z drugiej nierówności w Claimie 7.5.1, mamy*

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\| = \|x-x'\| \leq 2\cdot\|f(x)-f(x')\| = \|y-y'\| < 2\cdot\delta = 2\cdot\epsilon/2 = \epsilon.$$

Ciągłość funkcji f^{-1} *na zbiore* W *została wykazana.* ■
Pozostało nam do wykazania, że $f^{-1} \restriction W$ *(*$W \subseteq B(\bar{0},r/2)$*) jest różniczkowalna na* W. *W zwiazku z tym, udowodnimy. że dla każdego* $y \in W$

$$\lim_{y' \to y} \frac{\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y) - A^{-1}(y'-y)\|}{\|y'-y\|} = 0,$$

gdzie $A = J_f(f^{-1}(y))$ *jest macierzą odwracalną. Niech* $x = f^{-1}(y)$, $x' = f^{-1}(y')$ *będą w* $U_1 \subseteq U$. *Ponieważ z założenia* f *ma ciągłe pochodne pierwszego rzędu w każdym punkcie zbioru* U, *to* f *jest różniczkowalna w* $x \in U_1 \subseteq U$. *Więc*

$$\lim_{x' \to x} \frac{\|f(x') - f(x) - A(x'-x)\|}{\|x'-x\|} = 0.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
0 \leq & \frac{\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y) - A^{-1}(y'-y)\|}{\|y'-y\|} \\
= & \frac{\|x' - x - A^{-1}(f(x') - f(x))\|}{f(x') - f(x)} \\
= & \frac{\|(A^{-1}A)(x' - x - A^{-1}(f(x') - f(x)))\|}{\|x'-x\|} \frac{\|x'-x\|}{f(x') - f(x)} \\
= & \frac{\|A^{-1}(A(x'-x) - f(x') - f(x))\|}{\|x'-x\|} \frac{\|x'-x\|}{f(x') - f(x)} \\
\leq & \frac{\|A^{-1}\|\|(A(x'-x) - f(x') - f(x))\|}{\|x'-x\|} \frac{\|x'-x\|}{f(x') - f(x)}.
\end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że f^{-1} jest ciągła na całym zbiorze W więc

$$\lim_{n\to} t_n = y \longrightarrow \lim_{n\to\infty} f^{-1}(t_n) = f^{-1}(y) = x.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{y'\to y} \frac{\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y) - A^{-1}(y'-y)\|}{\|y'-y\|} = \lim_{x'\to x} \frac{\|x' - x - A^{-1}(f(x') - f(x))\|}{\|f(x') - f(x)\|} \\
&= \lim_{x'\to x} \frac{\|(A^{-1}\big(A(x'-x) - (f(x') - f(x))\big)\|}{\|x'-x\|} \cdot \frac{\|x'-x\|}{\|f(x') - f(x)\|} \\
&\leq \lim_{x'\to x} \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|f(x') - f(x) - A(x'-x)\|}{\|x'-x\|} \cdot 2 = 0.
\end{aligned}$$

Tutaj skorzystaliśmy z faktu, że dla dowolnej kwadratowej macierzy stopnia n jej norma, która jest zdefiniowana jako $\|B\| = \sup\{\|Bx\| : \|x\| \leq 1\}$ ma własność

$$(\forall x \in \mathbb{R}^n)\ (\|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\|).$$

Ponadto, zastsosowany był Claim 7.5.1 o nierówności $\|x'-x\| \leq 2 \cdot \|f(x') - f(x)\|$.

Twierdzenie zostało udowodnione. ■

Skorowidz

Bibliografia

[1] Kazimierz Kuratowski, Wstęp do rachunku różniczkowego*, PWN (1977), Biblioteka Matematyczna tom* **22**

[2] Marian Gewert i Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1*, GiS (2003)*